LERN-ONLINE.NET

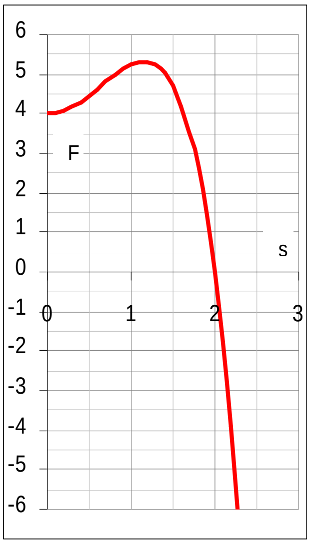
AUFGABENBLATT
MATHEMATIK

THEMA:
DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

Vorgeschlagene Arbeitszeit:	90 Minuten
Sonstige Hinweise:	-
Hilfsmittel:	Taschenrechner, nicht programmierbar, nicht graphikfähig

Hinweis: Die Lösungen finden sich nach den Aufgabenstellungen. Am Ende des Dokuments befinden sich die Bewertungskriterien.

Aufgaben

Aufg.	Aufgabenstellung	Punkte
1.	Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$. Ermitteln Sie die Fläche zwischen Graph und x-Achse über dem Intervall [-2; 1].	6
2.	Aus dem F-s-Diagramm eines physikalischen Versuches ergab sich annähernd die Funktion $F(s) = -\frac{3}{4}s^4 + 2s^2 + 4$ im Intervall [0; 2] (vgl. Abbildung rechts).  a. Beschreiben Sie aus dem Graphen den zeitlichen Verlauf der Kraft F. Weisen Sie dabei auf markante Punkte hin. Versuchen Sie, einen Vorgang zu benennen, bei dem ein solcher Verlauf einer Kraft auftreten könnte. b. Berechnen Sie die Position des Hochpunktes und des Wendepunktes im genannten Intervall. c. Weisen Sie sowohl logisch als auch mathematisch nach, dass der Graph nur für das Intervall von [0; 2] physikalisch sinnvoll sein kann. d. Ermitteln Sie die verrichtete Arbeit im genannten Intervall. Für die physikalische Arbeit gilt folgender Zusammenhang: $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)ds$ Die Einheit der Kraft ist 1N (Newton), die der Arbeit ist 1Nm=1J (Joule). e. Wie lautet die allgemeine Formel für die physikalische Arbeit, wenn die Kraft konstant bleibt?	43
3.	Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Weisen Sie nach, dass der Flächeninhalt über dem Intervall [0; 1] endlich ist.	6
4.	Berechnen Sie die folgenden Integrale: a. $\int_{-2}^{2} x \cdot e^{x^2} dx$ b. $\int_{0}^{\pi} \sin x \cdot e^x dx$ c. $\int_{3}^{5} \ln x dx$	15
5.	Berechnen Sie die Fläche zwischen Graphen und x-Achse für die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$ über dem Intervall [0; 7]. Nutzen Sie dafür mehrfach das Verfahren der partiellen Integration.	7

Lösungen

Aufg.	Lösung(svorschlag)	Punkte
1.	Nullstellenermittlung: $0 = 2x \cdot e^{x^2}$ Da e^{x^2} nicht Null werden kann, darf man dadurch dividieren, es bleibt dann: $0 = 2x$ $\Leftrightarrow x = 0$	1
	Flächenberechnung: $A_{Gesamt} = A_{[-2;0]} + A_{[0;1]}$	1
	Mit Hilfe der Substitutionsregel ermittelt man zunächst die eine, dann die andere Fläche: $A_{[-2;0]} = \left\| \int_{-2}^{0} 2x \cdot e^{x^2} dx \right\| = \left\| \int_{4}^{0} e^z dz \right\| = \left\| [e^z]_4^0 \right\| = \left\| e^0 - e^4 \right\| = \left\| 1 - e^4 \right\|$	1
	$A_{[0;1]} = \left\| \int_{0}^{1} 2x \cdot e^{x^2} dx \right\| = \left\| \int_{0}^{1} e^z dz \right\| = \left\| [e^z]_0^1 \right\| = \left\| e^1 - e^0 \right\| = \left\| e - 1 \right\|$	1
	$A_{Gesamt} = \left\|1 - e^4\right\| + \left\|e - 1\right\| \approx \left\|-53{,}6\right\| + \left\|1{,}72\right\| \approx 55{,}32 FE$	2
2.	Aufgabenteil a) (10 Punkte) Bei <u>t=0 beträgt die Kraft 4 Newton</u>. Sie <u>steigt</u> zunächst an, <u>fällt dann</u> aber wieder ab <u>bis 0</u>. <u>Nach etwa 1,2 Metern ist die Kraft am Größten.</u>	1 | 2 | 2 1 2
	Beispiel: Der Verlauf der Kraft könnte z.B. auf einen Berg verweisen, über den ein Gegenstand gezogen wird. Zuerst wird der Berg immer steiler, bis dann nach etwa 0,75m die Steigung abnimmt, also weniger Kraft aufgewendet werden muss. Nach 1,2m wird die benötigte Kraft immer niedriger, was keinesfalls auf einen Bergabhang deuten lässt, sondern einfach nur, dass er immer flacher ansteigt, da immer noch eine Kraft zum Ziehen aufgewendet werden muss.	Bsp.: 2
	Aufgabenteil b) (15 Punkte) Notwendige Bedingung für ein Extrema: f'(x)=F'(s)=0: $F'(s) = -3s^3 + 4s$	1
	$0 = -3s^3 + 4s$ $\Leftrightarrow 0 = s \cdot (-3s^2 + 4)$ $\Leftrightarrow 0 = s \vee 0 = -3s^2 + 4$ $\Leftrightarrow s = 0 \vee s^2 = \frac{4}{3}$ $\Leftrightarrow s = 0 \vee s = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \vee s = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$	3
	Die hinreichende Bedingung ist erfüllt, wenn die oben gefundenen Stellen in der 2. Ableitung einen Wert ungleich Null ergeben: $F''(s) = -9s^2 + 4$ $F''(0) = 0 + 4 > 0$ (Tiefpunkt)	2
	$F''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -9 \cdot \frac{4}{3} + 4 = -\frac{36}{3} + 4 = 4 - 12 < 0$ (Hochpunkt)	2

	Der letzte Wert ist kleiner als Null, also außerhalb des gegebenen Intervalls. Die Aufgabenstellung verlangt keine nähere Betrachtung des Punktes.	1
	Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt: F''(s)=0 $0 = -9s^2 + 4$ $\Leftrightarrow s^2 = \frac{4}{9}$	1
	$\Leftrightarrow s = \frac{2}{3} \vee s = -\frac{2}{3}$	2
	Die hinreichende Bedingung ist erfüllt, wenn die oben gefundenen Stellen in der 3. Ableitung einen Wert ungleich Null ergeben: $F'''(s) = -18s$	
	$F'''\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{36}{3} = -12 < 0$ (links-rechts-Kurve)	2
	Auch hier entfällt der 2. Wert, da er außerhalb des gegebenen Intervalls liegt.	1
	Aufgabenteil c) (10 Punkte) Die untere Intervallgrenze (0) ergibt sich, da eine <u>negative Strecke</u> nicht existiert. Es kann höchstens von einem Anfangsweg gesprochen werden, der zu vernachlässigen wäre.	2
	Die obere Intervallgrenze ergibt sich, da die <u>Kraft nicht negativ</u> werden kann: im o.g. Beispiel würde der Gegenstand dann nicht mehr gezogen, sondern rutscht selbstständig, was eine andere Ausgangslage bedeuten würde. Die obere Grenze ist die Nullstelle des Graphen im 1. Quadranten des Koordinatensystems:	2
	$0 = -\frac{3}{4}s^4 + 2s^2 + 4$ | Substitution: s²=z $\Rightarrow 0 = -\frac{3}{4}z^2 + 2z + 4$ $\Leftrightarrow 0 = z^2 - \frac{8}{3}z - \frac{16}{3}$	2
	$\Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{3}}$ $\Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{48}{9}}$ $\Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9}}$ $\Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{4}{3} \pm \frac{8}{3}$ $\Leftrightarrow z = 4 \vee z = -\frac{4}{3}$	1
	$s = \sqrt{z}$ $\Leftrightarrow s = \sqrt{4} \vee s = \sqrt{-\frac{4}{3}}$ $\Leftrightarrow s = 2 (\vee s = -2)$ Die Nullstelle im 1. Quadranten liegt also bei x=2.	3

	Aufgabenteil d) (5 Punkte) $W=\int_{s_1}^{s_2} F(s)ds$ $\Leftrightarrow W=\int_{s_1}^{s_2}\left(-\frac{3}{4}s^4+2s^2+4\right)ds$ $\Leftrightarrow W=\left[-\frac{3}{20}s^5+\frac{2}{3}s^3+4s\right]_0^2$ $\Leftrightarrow W=-\frac{3}{20}\cdot 2^5+\frac{2}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2-0$ $\Leftrightarrow W\approx 37{,}87\,J$ Aufgabenteil e) (3 Punkte) $W=\int_{s_1}^{s_2} F(s)ds$ $F(s)=F=\text{konst.}$ $W=\int_{s_1}^{s_2} Fds=[F\cdot s]_{s_1}^{s_2}=F\cdot s_2-F\cdot s_1=F\cdot(s_2-s_1)=F\cdot\Delta s$	1 2 1 1 1 2
3.	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ Da f an der Stelle x=0 nicht definiert ist, muss der Grenzwert verwendet werden. Wir bedienen uns dazu der Variablen a: $\lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ $=\lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$ $=\lim_{a\to 0}\left[2\cdot\sqrt{x}\right]_a^1$ $=\lim_{a\to 0}2\cdot 1-\lim_{a\to 0}2\cdot\sqrt{a}$ $=\lim_{a\to 0}2-2\cdot\lim_{a\to 0}\sqrt{a}$ $=\lim_{a\to 0}2-0$ $=2$ q.e.d. / w.z.b.w.	2 1 2 1
4.	Aufgabenteil a) (4 Punkte) Substitutionsregel: $\int_{-2}^{2} x\cdot e^{x^2}dx$ $=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x\cdot e^{x^2}dx$ $=\frac{1}{2}\cdot\int_{-2}^{2}2x\cdot e^{x^2}dx$ $=\frac{1}{2}\cdot\int_4^4 e^z dz$ $=\frac{1}{2}\cdot 0$ $=0$ Aufgabenteil b) (6 Punkte) Partielle Integration:	1 2 1

	$\int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx = [\sin x \cdot e^x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x \cdot e^x dx$	2
	$\Leftrightarrow \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx = [\sin x \cdot e^x]_0^\pi - \left([\cos x \cdot e^x]_0^\pi - \int_0^\pi -\sin x \cdot e^x dx\right)$	
	$\Leftrightarrow \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx = [\sin x \cdot e^x]_0^\pi - \left([\cos x \cdot e^x]_0^\pi + \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx\right)$	2
	$\Leftrightarrow \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx = [\sin x \cdot e^x]_0^\pi - [\cos x \cdot e^x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx$	
	$\Leftrightarrow 2 \cdot \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx = [\sin x \cdot e^x]_0^\pi - [\cos x \cdot e^x]_0^\pi$	1
	$\Leftrightarrow \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx = \frac{[\sin x \cdot e^x]_0^\pi - [\cos x \cdot e^x]_0^\pi}{2}$	
	$\Leftrightarrow \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\sin(\pi) \cdot e^\pi - \cos(\pi) \cdot e^\pi - (\sin(0) \cdot e^0 - \cos(0) \cdot e^0)\right)$	
	$\Leftrightarrow \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\sin(\pi) \cdot e^\pi - \cos(\pi) \cdot e^\pi - \sin(0) \cdot e^0 + \cos(0) \cdot e^0\right)$	
	$\Leftrightarrow \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx = \frac{1}{2} \cdot \left(0 - 0 - (-1) \cdot e^\pi + 1\right)$	
	$\Leftrightarrow \int_0^\pi \sin x \cdot e^x dx = 24{,}14$	1
	Aufgabenteil c) (5 Punkte)	
	$\int_3^5 \ln x dx$	
	$= [x \cdot \ln x - x]_3^5$	3
	$= 5 \cdot \ln 5 - 5 - (3 \cdot \ln 3 - 3)$	1
	$= 5 \cdot \ln 5 - 5 - 3 \cdot \ln 3 + 3$	
	$= 5 \cdot \ln 5 - 3 \cdot \ln 3 - 2$	
	$\approx 2{,}75$	1
5.	Nullstellenermittlung:	
	$0 = x^2 \cdot e^x \mid : e^x$	1
	$\Leftrightarrow x = 0$	1
	Flächenermittlung:	
	$A = \left\| \int_0^7 x^2 \cdot e^x dx \right\|$	
	$= \left\| [x^2 \cdot e^x]_0^7 - \int_0^7 2x \cdot e^x dx \right\|$	1
	$= \left\| [x^2 \cdot e^x]_0^7 - \left([2x \cdot e^x]_0^7 - \int_0^7 2 \cdot e^x dx\right) \right\|$	1
	$= \left\| [x^2 \cdot e^x]_0^7 - [2x \cdot e^x]_0^7 + [2 \cdot e^x]_0^7 \right\|$	1
	$= \left\| 37 \cdot e^7 - 2 \right\| \approx 40.573{,}42 FE$	2

Bewertungskriterien

Erreichte Punktzahl	Notenpunkte	Note
77 - 73	15	Sehr gut plus (1^+)
72 - 69	14	Sehr gut (1)
68 - 65	13	Sehr gut minus (1^-)
64 - 62	12	Gut plus (2^+)
61 - 58	11	Gut (2)
57 - 54	10	Gut minus (2^-)
53 - 50	9	Befriedigend plus (3^+)
49 - 46	8	Befriedigend (3)
45 - 42	7	Befriedigend minus (3^-)
41 - 39	6	Ausreichend plus (4^+)
38 - 35	5	Ausreichend (4)
34 - 31	4	Ausreichend minus (4^-)
30 - 25	3	Mangelhaft plus (5^+)
24 - 21	2	Mangelhaft (5)
20 - 15	1	Mangelhaft minus (5^-)
14 - 0	0	Ungenügend (6)

Hellgrüner Bereich:
Ein tolles Ergebnis! Weiter so!!!

Grüner Bereich:
Keineswegs zu verachten! Eine gute Leistung, auch wenn leichte Wissenslücken bestehen.

Helloranger Bereich:
Die Grundlagen bestehen auf jeden Fall, es muss lediglich sorgfältiger gelernt zu werden. Es empfiehlt sich, auch mal im Forum (http://www.lern-online.net/forum/) vorbeizuschauen.

Orangener Bereich:
Es besteht recht hoher Nachholbedarf. Wiederholen Sie die Kapitel, in denen Sie Fehler gemacht haben und versuchen Sie sich noch mal an diesen Aufgaben!!!

Roter Bereich:
Sie sollten sich nochmals alle bisher behandelten Kapitel genau durchlesen. Eine Hilfe sind immer Notizen. Diese sollten Sie natürlich nicht bei der Aufgabenbewältigung benutzen. Schauen Sie sich auch im Forum um!

Wie werden die Punkte verteilt?

Die Aufgaben sind für die Punkte ausschlaggebend. Neben der Aufgabenstellung finden Sie immer die erreichbare Punktzahl. In der Lösung werden Sie auch genauer sehen, wofür es Punkte gab. Da Sie alleine arbeiten, ist es unsinnig, sich selbst mehr Punkte zu geben, als eigentlich gedacht. Es gibt keine Sonderpunkte, wenn Sie die Aufgaben in besonderem Maße erfüllt haben. Seien Sie ehrlich zu sich selbst.

