## Gleichungslehre

### Was ist eine Gleichung?

Eine Gleichung ist ein Gebilde der Art *Term* = *Term*.

**Beispiel:** $3x = 4 + 2x$ ist eine Gleichung mit den Termen $3x$ und $4 + 2x$.
Eine Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn die Terme auf beiden Seiten äquivalent sind. *Lösungen* einer Gleichung sind die Zahlen, die man für eine Variable einsetzen muss, damit die Gleichung erfüllt ist. Die Gleichung aus dem Beispiel hätte also die Lösung 4, denn $3 \cdot 4 = 12$ und $4 + 2 \cdot 4 = 12$.

## Lineare Gleichungen

Die Gleichung aus unserem Beispiel war eine *Lineare Gleichung*, weil die Variable x nur als einfache Potenz vorkommt und nicht auch noch in der Form $x^2$, $x^3$ oder $x^n$.
Wie löst man nun solche Gleichungen auf, dh. wie findet man den Wert, den man für x einsetzen muss, damit die Gleichung erfüllt ist? Ausprobieren wäre sicher eine Möglichkeit, ist aber doch recht unbefriedigend. Der Schlüssel zum Erfolg sind die sogenannten *Äquivalenzumformungen*.
Man kann sich eine Gleichung wie eine Waage vorstellen, die immer im Gleichgewicht bleiben muss. In unserem Beispiel stehen auf der linken Seite 3 Gewichte, die zwar auf jeden fall Gleich schwer sind, aber noch unbekannt sind. Auf der rechten Seite stehen 2 dieser unbekannten Gewichte und ein Gewicht von 4kg.
Damit die Waage immer im Gleichgewicht bleibt, muss man jede Rechenoperation auf beiden Seiten durchführen. In unserem Beispiel nehmen wir rechts die beiden unbekannten Gewichte von der Waage runter. Dann steht dort nur noch das 4kg-Gewicht. Jetzt ist die Waage aber nicht mehr im Gleichgewicht, also nehmen wir auch links 2 der unbekannten Gewichte runter. Jetzt steht rechts nur noch ein einziges unbekanntes Gewicht. Mathematisch gesehen: $x = 4$. Damit ist die Gleichung gelöst, denn wir wissen jetzt, dass das unbekannte Gewicht 4kg wiegt!

**Mathematisch ausgedrückt:** Um eine Lineare Gleichung die nur eine Variable x enthält zu lösen wendet man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die selben Operationen an, um die Terme auf beiden Seiten so zu verändern, bis auf einer Seite nur noch das x und auf der anderen Seite nur noch eine Zahl steht. In jedem Schritt erhält man also aus einer Gleichung eine neue Gleichung, die aber genau die selbe Lösung besitzt. Solche Gleichungen nennt man *äquivalent*. $3x = 12$ ist z.B. äquivalent zu $2x = 8$, denn beide haben nur die Lösung $x = 4$. Um auszudrücken, dass zwei Gleichungen äquivalent sind benutzt man das $\Longleftrightarrow$ -Zeichen. Um auszudrücken, dass eine Rechenoperation auf beide seiten der Gleichung angewendet wird benutzt man das $|$-Zeichen.

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} 5x - 6 &= 3x - 4 \quad | + 6 \\ \iff 5x &= 3x + 2 \quad | - 3x \\ \iff 2x &= 2 \quad | : 2 \\ \iff x &= 1 \end{aligned}$$

Das Beispiel zeigt anschaulich, wie man vorgehen muss:

1. Zahlen auf die rechte Seite bringen
2. Variablen auf die linke Seite bringen
3. Durch den Koeffizienten (die Zahl vor dem x) teilen

Vor Schritt 1 bzw. Schritt 2 muss man eventuell noch Klammern ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} 5x - 6 &= 3(x - \frac{4}{3}) \\ \iff 5x - 6 &= 3x - 4 \end{aligned}$$

**Lineare Gleichungssysteme**

Besitzt eine Gleichung zwei Variablen x und y kann man sie nicht eindeutig lösen. Man benötigt dazu mindestens zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 18 \\ 2x + 5y &= 19 \end{aligned}$$

Nun formt man beide Gleichungen so um, dass sich eine der Variablen wegkürzt:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 18 \qquad | \cdot 2 \\ 2x + 5y &= 19 \qquad | \cdot (-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x + 8y &= \quad 36 \\ -6x - 15y &= \quad -57 \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen addiert man nun und erhält so eine neue Gleichung:

$$\begin{aligned} 6x + 8y - 6x - 15y &= \quad -21 \\ \iff -7y &= \quad -21 \quad | : (-7) \\ \iff y &= 3 \end{aligned}$$

Den so für y ermittelten Wert setzt man nun in eine der beiden Ausgangsgleichungen ein und erhält so eine Gleichung mit nur einer unbekannten, die auf die Gewohnte weise gelöst wird:

$$\begin{aligned} 3x + 4 \cdot 3 &= \quad 18 \\ \iff 3x + 12 &= \quad 18 \quad | - 12 \\ \iff 3x &= \quad 6 \quad | : 3 \\ \iff x &= \quad 2 \end{aligned}$$

Für Gleichungssysteme mit 3 Variablen und 3 Gleichungen geht man wie folgt vor:

1. Man wendet das eben vorgestellte Verfahren an, um aus den Gleichungen (1) und (2) eine Unbekannte zu eliminieren.
2. Das selbe tut man für die Gleichungen (1) und (3)
3. Man erhält aus Schritt 1 und 2 zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Diese löst man genau wie oben auf.
4. Die beiden aus Schritt 3 erhaltenen Zahlen setzt man nun in eine der Ausgangsgleichungen ein und erhält eine Gleichung mit einer Unbekannten

**Beispiel:**

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & 3x + 2y - z = & -3 \\ \text{(II)} & x - y + 2z = & 5 \\ \text{(III)} & -x + y + z = & 7 \end{array}$$

(I) und (II) benutzen und z eliminieren:

$$\begin{array}{rrll} \text{(I)} & 3x + 2y - z = & -3 & | \cdot 2 \\ \Longleftrightarrow & 6x + 4y - 2z = & -6 & \\ \text{(II)} & x - y + 2z = & 5 & \\ \text{(I)+(II)} & 7x + 3y = -1 & & \end{array}$$

(I) und (III) benutzen und z eliminieren:

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & 3x + 2y - z = & -3 \\ \text{(III)} & -x + y + z = & 7 \\ \text{(I)+(III)} & 2x + 3y = & 4 \end{array}$$

Die neu erhaltenen Gleichungen benutzen, um y zu eliminieren:

$$\begin{array}{rrll} \text{(I)+(II)} & 7x + 3y = & -1 & \\ \text{(I)+(III)} & 2x + 3y = & 4 & | \cdot (-1) \\ 5x & = & -5 & | : 5 \\ x & = & -1 & \end{array}$$

x in "(I) + (II)" einsetzen:

$$\begin{array}{rrll} \text{(I)+(II)} & -7 + 3y = & -1 & | + 7 \\ \Longleftrightarrow & 3y = & 6 & | : 3 \\ \Longleftrightarrow & y = & 2 & \end{array}$$

x und y in (I) einsetzen:

$$\begin{array}{rrll} \text{(I)} & -3 + 4 - z = & -3 & \\ \Longleftrightarrow & 1 - z = & -3 & | - 1 \\ \Longleftrightarrow & -z = & -4 & | : (-1) \\ \Longleftrightarrow & z = & 4 & \end{array}$$