Partielle Integration und Substitutionsregel

Integrieren eines Produktes

Wie wir bereits festgestellt haben, gilt für eine Funktion f:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

Um also eine Funktion integrieren zu können, muss man die Stammfunktion kennen. Bei einfachen Funktionstermen wie z.B. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$ mag das noch locker von der Hand gehen, aber wie steht es mit einer Funktion wie $f(x) = (x+1)\cdot e^x$? Wir haben hier ein Produkt vorliegen, auf das man durch Ableiten so schlecht kommen würde. Eine Stammfunktion ist also relativ schwer zu ermitteln. Wollen wir das Integral dieser Funktion über dem Intervall [-1;1] bestimmen, müssten wir schreiben:

$$\int_{-1}^{1} (x+1)\cdot e^x dx$$

Die Aufleitung dieser Funktion ist - wie bereits gesagt - recht schwierig. Aber dafür hat die Mathematik die *partielle Integration*, die es ermöglicht, den Term in Einzelteile zu zerlegen und der Reihe nach zu integrieren.

Partielle Integration

Zunächst verpacken wir unsere Beispielfunktion in eine allgemeinere Form:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$$

Bemerkenswert daran ist: wir nehmen an, dass der u(x)-Term ein normaler Term ist, aber das v(x) bereits abgeleitet wurde. Das hört sich jetzt erstmal schwerer an, als es ist. Gehen wir zurück zu unserer Beispielfunktion. Wir nehmen an, dass u(x)=x+1 und v'(x)=e^x ist. Wir lassen uns vorerst gar nicht davon beeindrucken, dass der zweite Term als abgeleitet angesehen wird.
Die Regel für die partielle Integration besagt nun, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx$$

Zuerst legen wir also fest, dass in den eckigen Klammern das ursprüngliche u(x) steht und das aufgeleitete v'(x), also v(x). v'(x) ist dementsprechend so zu wählen, dass es relativ leicht aufgeleitet werden kann, wie z.B. e^x. Dieser Term ist dann vollständig und braucht nicht weiter bearbeitet zu werden. Im rechten Teil kommt ein neues Integral vor, in dem u(x) abgeleitet wurde und wieder die Aufleitung von v'(x) steht. u(x) abzuleiten sollte mit den bekannten Regeln kein Problem darstellen, und v(x) sollte wie gesagt einfach zu ermitteln sein. Für unser Beispiel ergibt sich dann:

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} (x+1)\cdot e^x dx = [(x+1)\cdot e^x]_{-1}^{1} - \int_a^b 1\cdot e^x dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} (x+1)\cdot e^x dx = [(x+1)\cdot e^x]_{-1}^{1} - [e^x]_{-1}^{1}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} (x+1)\cdot e^x dx = ((1+1)\cdot e - (-1+1)\cdot e) - (e - e^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} (x+1)\cdot e^x dx = (2e - 0) - \left(e - \frac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} (x+1)\cdot e^x dx = e + \frac{1}{e}$$

Es kann auch vorkommen, dass man dieses Verfahren mehrmals anwenden muss. Das schauen wir uns in einer kleinen Beispielaufgabe an.

© 2002 - 2006 by Kevin Kaatz

Beispielaufgaben

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 (-6x^2+4)\cdot e^x dx$. Wenden Sie dabei mehrfach die partielle Integration an.

Unser Vorgehen sollte klar sein: wir bestimmen erst einmal ein passendes u(x) und ein passendes, leicht integrierbares v'(x). Auch hier bietet sich e^x für v'(x) an. Somit können wir loslegen:

$$\int_0^1 (-6x^2+4)\cdot e^x dx = \left[(-6x^2+4)\cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 -12x\cdot e^x dx$$

$$\int_0^1 (-6x^2+4)\cdot e^x dx = \left[(-6x^2+4)\cdot e^x\right]_0^1 - \left(\left[-12x\cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 -12\cdot e^x dx\right)$$

$$\int_0^1 (-6x^2+4)\cdot e^x dx = \left[(-6x^2+4)\cdot e^x\right]_0^1 - \left(\left[-12x\cdot e^x\right]_0^1 - \left[-12\cdot e^x\right]_0^1\right)$$

$$\int_0^1 (-6x^2+4)\cdot e^x dx = \left[(-6x^2+4)\cdot e^x\right]_0^1 - \left[-12x\cdot e^x\right]_0^1 + \left[-12\cdot e^x\right]_0^1$$

$$\int_0^1 (-6x^2+4)\cdot e^x dx = (-6+4)\cdot e - 4 - (-12\cdot e - 0) + (-12\cdot e + 12)$$

$$\int_0^1 (-6x^2+4)\cdot e^x dx = -2e - 4 + 12e - 12e + 12$$

$$\int_0^1 (-6x^2+4)\cdot e^x dx = -2e + 8$$

Wir sehen also, dass die partielle Integration recht einfach in der Handhabung ist. Wir wollen dennoch eine weitere Aufgabe lösen, die etwas schwieriger ist:

Berechnen Sie das Integral $\int_a^b \sin x\cdot e^x dx$. Wenden Sie dabei mehrfach die partielle Integration an.

Was hier schwieriger ist, liegt vielleicht schon auf der Hand: bisher haben die Funktionen von u(x) immer irgendwann 1 ergeben, sodass nur e^x aufgeleitet werden musste. Für die trigonometrischen Funktionen wird daraus aber nichts:

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

Wie soll man nun aber vorgehen? Verfahren wir erst einmal so, wie wir es schon mal getan haben. In unserem ersten Schritt ist u(x)=sin(x):

$$\int_a^b \sin x\cdot e^x dx = \left[\sin x\cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b \cos x\cdot e^x dx$$

Nun sind wir in etwa so schlau wie vorher, aber wir geben an dieser Stelle noch nicht auf, sondern machen weiter, vielleicht ergibt sich ja noch etwas Schönes. Dieses Mal nehmen wir als u(x)=cos(x), sodass sich folgendes ergibt:

$$\int_a^b \sin x\cdot e^x dx = \left[\sin x\cdot e^x\right]_a^b - \left(\left[\cos x\cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b -\sin x\cdot e^x dx\right)$$

$$\int_a^b \sin x\cdot e^x dx = \left[\sin x\cdot e^x\right]_a^b - \left[\cos x\cdot e^x\right]_a^b + \int_a^b -\sin x\cdot e^x dx$$

$$\int_a^b \sin x\cdot e^x dx = \left[\sin x\cdot e^x\right]_a^b - \left[\cos x\cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b \sin x\cdot e^x dx$$

Sieht jetzt zwar schick aus, aber hilft es uns denn? Ja! Betrachten wir mal den Anfang und das Ende der Gleichung: $\int_a^b \sin x\cdot e^x dx$ bzw. $-\int_a^b \sin x\cdot e^x dx$. Wenn wir nun durch Addition das Integral von rechts nach links „verschieben“, so ergibt sich:

$$2\cdot\left(\int_a^b \sin x\cdot e^x dx\right)=\left[\sin x\cdot e^x\right]_a^b-\left[\cos x\cdot e^x\right]_a^b$$

$$\int_a^b \sin x\cdot e^x dx=\frac{\left[\sin x\cdot e^x\right]_a^b-\left[\cos x\cdot e^x\right]_a^b}{2}$$

$$\int_a^b \sin x\cdot e^x dx=\frac{\sin b\cdot e^b-\sin a\cdot e^a-\left(\cos b\cdot e^b-\cos a\cdot e^a\right)}{2}$$

$$\int_a^b \sin x\cdot e^x dx=\frac{\sin b\cdot e^b-\sin a\cdot e^a-\cos b\cdot e^b+\cos a\cdot e^a}{2}$$

$$\int_a^b \sin x\cdot e^x dx=\frac{e^b\cdot(\sin b-\cos b)-e^a\cdot(\sin a+\cos a)}{2}$$

Und schon ist das Problem gelöst. Das Vorgehen ist also, so lange zu integrieren, bis irgendwann der Ausgangsterm addiert werden kann, sodass er auf einer Seite durch Halbieren wegfällt.

Substitutionsregel

Schauen wir uns die Funktion f mit $f(x)=4x^3\cdot e^{x^4}$ einmal genauer an. Wir sehen hier wie gewohnt eine Funktion, in der ein Produkt vorkommt. Wollten wir nun die Funktion integrieren, müssten wir mit der partiellen Integration solange arbeiten, bis die $4x^3$ zu 1 abgeleitet wurden. Es geht hier aber auch einfacher: wie wir wissen, gilt die Kettenregel:

$$\left(e^{x^4}\right)'=4x^3\cdot e^{x^4}$$

Sehen wir also, dass das Produkt aus innerer und äußerer Ableitung besteht, könnten wir uns das zu Nutze machen. Es gilt die Substitutionsregel:

$$\int_a^b v'(x)\cdot u'(v(x))dx=\int_{v(a)}^{v(b)} u'(z)dz$$

Das sieht schon wieder komplizierter aus, als es ist. Wir wollen es uns am Beispiel klar machen: Wenn $v(x)=x^4$ ist, dann ist $v'(x)=4x^3$. Damit haben wir die gesamte innere Funktion abgehakt: v'(x) steht als Faktor da und v(x) ist innere Funktion für u'(x). $u'(x)=e^x$, das dürfte klar sein. Damit haben wir den linken Teil der Gleichung erfüllt. Nun ändern sich rechts erstmal die Intervallgrenzen. Wir nehmen für unser Beispiel das Intervall [0; 2]:

$$\int_0^2 4x^3\cdot e^{x^4}dx=\int_{v(0)}^{v(2)} e^z dz$$

$$v(x)=x^4$$
$$\Rightarrow v(0)=0^4=0$$
$$\Rightarrow v(2)=2^4=16$$

$$\int_0^2 4x^3\cdot e^{x^4}dx=\int_{v(0)}^{v(2)} e^z dz=\int_0^{16} e^z dz=\left[e^z\right]_0^{16}=e^{16}-e^0=e^{16}-1\approx 8.886.109{,}52$$

Und das war auch schon der ganze Trick dabei! Was wir uns nun anschauen wollen, ist, was passiert, wenn die innere Ableitung beinahe da steht, aber ein bestimmter Faktor fehlt. Modifizieren wir unsere Funktion von eben:

$$\int_0^2 x^3\cdot e^{x^4}dx$$

Es fehlt nun der Faktor 4. Das ist aber mathematisch kein Problem: wir erweitern mit 4 und teilen durch vier, multiplizieren also 1:

$$\int_0^2 \frac{1}{4}\cdot 4x^3\cdot e^{x^4}dx=\frac{1}{4}\cdot\int_0^2 4x^3\cdot e^{x^4}dx$$

Von da an sollte uns das Prozedere ja bekannt sein, den Vorfaktor 0,25 bedenken wir später einfach nur bei der Berechnung. Es würde sich dann ergeben, dass das Integral rund 2.221.527,38 beträgt, also ein Viertel des Ursprungswertes.

© 2002 - 2006 by Kevin Kaatz