Anwendungsaufgabe – LÖSUNG

AUFGABE:

Ein Motorradfahrer legt mit einer konstanten Beschleunigung von $0{,}8\frac{m}{s^2}$ aus der Ruhe einen Weg von 1 km zurück.
a) Wie lange braucht er dazu? Wie groß ist seine Geschwindigkeit am Ende der gefahrenen Strecke?
b) Am Ende der Strecke bremst der Motorradfahrer plötzlich ab ($a=-1{,}6\frac{m}{s^2}$). Nach welcher Zeit kommt er zum Stillstand? Wie lang ist sein Bremsweg?

LÖSUNG:

Teilaufgabe a)
Der Motorradfahrer fährt *aus der Ruhe* los. Das bedeutet keine Anfangsgeschwindigkeit und keinen Anfangsweg. Da die Beschleunigung (zur Vereinfachung der physikalischen Gegebenheiten) konstant ist, können wir die Bewegungsgleichungen verwenden. Kümmern wir uns zunächst um die Zeit, die der Fahrer braucht, um den einen Kilometer zurückzulegen:

Gegeben:
$a = 0{,}8\frac{m}{s^2}$; $s=1km$; $v_0 = 0$; $s_0 = 0$
Gesucht:
t_{Weg} ;

Es gilt:
Weg-Zeit-Gesetz:
$$s = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$
Da Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsweg gleich Null sind, vereinfacht sich die Formel zu:
$$s = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$$
Da wir t brauchen, können wir also umstellen:
$$s = \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$$
$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{2\cdot s}{a}$$
$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\cdot s}{a}}$$
Jetzt können wir die gegebenen Werte einsetzen, da in dieser Gleichung nur noch t als Unbekannte fungiert:
$$t_{Weg} = \sqrt{\frac{2\cdot 1000m}{0{,}8\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{\frac{2000m}{0{,}8\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{2500\frac{m}{\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{2500\frac{m\cdot s^2}{m}} = \sqrt{2500s^2} = 50s$$
Daran kann man übrigens auch den Vorteil erkennen, den man beim Rechnen mit Einheiten bekommt: gesucht war eine Zeit und die Einheit, die am Ende rechnerisch herausgefunden wurde (und nicht durch Raten bzw. freie Willkür) ist eine Zeiteinheit (Sekunden). Das zeigt mir, dass das Ergebnis schon mal richtig sein könnte. Wäre dort z.B. Meter herausgekommen, wüsste ich, dass irgendwo ein Rechenfehler vorliegen müsste.

Kommen wir nun zur zweiten Frage. Gesucht ist die Geschwindigkeit, die der Motorradfahrer nach der gegebenen Strecke hat. Da, wie oben bereits geschrieben, die Bewegung gleichmäßig beschleunigt ist, können wir die uns wohl bekannten Formeln weiterhin benutzen.

Gegeben:

$a = 0{,}8\frac{m}{s^2}$; $s = 1km$; $v_0 = 0$; $s_0 = 0$; $t_{Weg} = 50s$;

Gesucht:

v_{End} ;

Es gilt:

Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz:

$v = a \cdot t + v_0$

Da die Anfangsgeschwindigkeit wieder gleich Null ist, können wir das Gesetz auf diese Form vereinfachen:

$v = a \cdot t$

Die Beschleunigung ist gegeben, fragt sich nur, welche Zeit eingesetzt werden muss. Als gebildete Physiker wissen wir natürlich, welche Zeit es ist: die Zeit, die der Motorradfahrer für die Strecke von 1km braucht. Wir wollen ja die Geschwindigkeit am Ende der Strecke. Von oben wissen wir:

$$t_{Weg} = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$$

Nun kann man sich fragen, warum ich hier nicht direkt den gegebenen Wert einsetze. Ganz einfach: warum soll ich es mir so schwer machen? Physik ist ein Fach, in dem man lieber Zusammenhänge erkennen sollte anstatt richtige Ergebnisse (wobei letzteres natürlich keineswegs unwichtig ist!). Schauen wir uns das doch mal eingesetzt an:

$$v_{End} = a \cdot t_{Weg}$$

$$\Leftrightarrow v_{End} = a \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$$

Nun wäre es schön, wenn wir auch das erste a in die Wurzel einbringen könnten. Warum tun wir es nicht einfach? Wir wissen: $\sqrt{a^2} = a$. Also können wir sagen:

$$\Leftrightarrow v_{End} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$$

$$\Leftrightarrow v_{End} = \sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot a^2}{a}}$$

$$\Leftrightarrow v_{End} = \sqrt{2 \cdot a \cdot s}$$

Wir sehen hier, dass die Geschwindigkeit prinzipiell auch hätte ohne Zeitberechnung berechnet werden können. Sind Strecke und Beschleunigung gegeben, so ist es unnötig, die Zeit zu berechnen. Setzen wir nun ein:

$$v_{End} = \sqrt{2 \cdot 0{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 1000m} = \sqrt{1600\frac{m}{s^2} \cdot m} = \sqrt{1600\frac{m^2}{s^2}} = 40\frac{m}{s}$$

$$\Leftrightarrow v_{End} = 40\frac{\frac{1}{1000}km}{\frac{1}{3600}h} = 40 \cdot \frac{3600}{1000} \cdot \frac{km}{h} = 144\frac{km}{h}$$

Die Umrechnung von Metern durch Sekunde in Kilometer pro Stunde ist – normalerweise – bei Geschwindigkeitsangaben für Autos oder Motorräder recht sinnvoll.

Teilaufgabe b)

Der Motorradfahrer hat bereits eine Anfangsgeschwindigkeit, die wir eben berechnet haben. Um die Zeit zu ermitteln, die er zum absoluten Stillstand braucht, müssen wir uns erst etwas überlegen: welche Eigenschaft unterscheidet den Motorradfahrer, wenn er zum Stillstand gekommen ist? Die Geschwindigkeit, mit der er sich fortbewegt, muss gleich Null sein! Denn ist die Geschwindigkeit Null, steht das Motorrad. Wir stellen fest:

Gegeben:

$v_0 = 40\frac{m}{s}$; $a = -1{,}6\frac{m}{s^2}$

Gesucht:

t_{still};

Da das Abbremsen ebenfalls eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung darstellt, können wir die Bewegungssätze anwenden.

Es gilt:

Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz:

$v = a \cdot t + v_0$

Wie eben festgestellt, muss die Geschwindigkeit v gleich Null sein, also:

$0 = a \cdot t + v_0$

$\Leftrightarrow -v_0 = a \cdot t_{still}$

$\Leftrightarrow t_{still} = \frac{-v_0}{a}$

Jetzt können wir die Werte einsetzen, die gegeben sind:

$$t_{still} = \frac{-40\frac{m}{s}}{-1{,}6\frac{m}{s^2}} = 25\frac{\frac{m}{s}}{\frac{m}{s^2}} = 25\frac{m \cdot s^2}{m \cdot s} = 25s$$

Der Motorradfahrer kommt also nach 25 Sekunden zum absoluten Stillstand. Kommen wir nun zur Berechnung des Bremsweges:

Gegeben:

$v_0 = 40\frac{m}{s}$; $a = -1{,}6\frac{m}{s^2}$; $t_{still} = 25s$

Gesucht:

s_{Brems}

Es gilt:

Weg-Zeit-Gesetz:

$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$

Stellt sich noch eine Frage: was ist s_0? Eigentlich wäre es der bereits zurück gelegte Kilometer, aber der interessiert uns eigentlich überhaupt nicht. Es interessiert uns nur der Weg, den der Motorradfahrer braucht, um von seiner Anfangsgeschwindigkeit herunter zu bremsen auf Null. Daher ist s_0 gleich Null. Somit:

$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$

Nun müssen wir nur noch die Zeit einsetzen, die der Motorradfahrer zum Bremsen braucht. Auch hier wollen wir das erst allgemein machen:

$$s_{Brems} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{-v_0}{a}\right)^2 + v_0 \cdot \left(\frac{-v_0}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow s_{Brems} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{v_0^{\ 2}}{a^2} + v_0 \cdot \frac{-v_0}{a}$$

$$\Leftrightarrow s_{Brems} = \frac{v_0^{\ 2}}{2 \cdot a} - \frac{v_0^{\ 2}}{a}$$

$$\Leftrightarrow s_{Brems} = \frac{v_0^2}{2 \cdot a} - \frac{2 \cdot v_0^2}{2 \cdot a}$$

$$\Leftrightarrow s_{Brems} = \frac{-v_0^2}{2 \cdot a}$$

Auch hier sehen wir wieder, dass die Berechnung der Zeit absolut unnötig ist, wenn es um den Bremsweg geht. Setzen wir nun die uns gegebenen Werte ein:

$$s_{Brems} = \frac{-\left(40\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot \left(-1{,}6\frac{m}{s^2}\right)} = \frac{-1600\frac{m^2}{s^2}}{-3{,}2\frac{m}{s^2}} = 500\frac{\frac{m^2}{s^2}}{\frac{m}{s^2}} = 500\frac{m^2 \cdot s^2}{m \cdot s^2} = 500m$$

Der Bremsweg des Motorradfahrers beträgt also 500 Meter.

Noch etwas...

Dieses Lösungsblatt soll nebenbei noch zeigen, dass man sich – sofern man es denn kann – sehr viel Arbeit ersparen kann, wenn man erstmal nur allgemeine Formeln aufstellt. In Tests und Klausuren ist es immer sinnvoll, eine allgemeingültige Formel aufzustellen, wenn man z.B. mehrmals ein und die selbe Rechnung machen muss. An den Formeln oben kann man jetzt Problemlos etwas verändern (z.B. die Anfangsgeschwindigkeit), ohne alles von vorne rechnen zu müssen. In der Regel werden die Aufgaben so gestellt, dass noch ein paar andere Werte mit angegeben werden, z.B.:

Berechnen Sie den Bremsweg, wenn der Motorradfahrer mit einer Beschleunigung von $4{,}2\frac{m}{s^2}$ $\left(2{,}2\frac{m}{s^2}; 3{,}2\frac{m}{s^2}; 0{,}2\frac{m}{s^2}\right)$ abbremst!

Hier sieht man, dass nur das a verändert werden muss, was in der allgemeinen Formel überhaupt kein Problem darstellt.

Was man auch an der Aufgabenstellung von eben sehen kann: in der Physik muss man die Aufgabe genau lesen!!! Der Fahrer *bremst ab*, das heißt, dass die Beschleunigungen zwar Betragsgleich sind, aber alle negativ sein müssen, wenn man mit ihnen rechnen muss!