LERN-ONLINE.NET

AUFGABENBLATT
MATHEMATIK

THEMA:
EINFÜHRUNG IN DIE INTEGRALRECHNUNG

Vorgeschlagene Arbeitszeit:	45-60 Minuten
Sonstige Hinweise:	Aufgabe 5 ist sehr zeitintensiv!
Hilfsmittel:	Taschenrechner, nicht programmierbar, nicht graphikfähig

Hinweis: Die Lösungen finden sich nach den Aufgabenstellungen. Am Ende des Dokuments befinden sich die Bewertungskriterien.

Aufgaben

Aufg.	Aufgabenstellung	Punkte
1.	Erläutern Sie die Begriffe Stammfunktion, Integral und Flächeninhalt! Gehen Sie dabei am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2 - 1; x \in [0;3]$ aus.	16,5
2.	Zeigen Sie mittels Untersummen, dass für die „Fläche unter der Kurve“ der Funktion $f(x) = x^3$ über dem Intervall $[0;x_0]$ gilt: $A = \frac{1}{4} x_0^4$ Hinweis: Für die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, …, k gilt: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{1}{4} k^2 (k+1)^2$	10
3.	Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse für die Funktion $f(x) = x^3$ über dem Intervall [-2;5].	8
4.	Berechnen Sie die Variable k: a) $\int_{-2}^{0} (x^2 - k^2) dx = 0$ b) $\int_{0}^{k} \frac{1}{2} x^2 dx = 4$ c) $\int_{0}^{k} (k^2 x + kx^2) dx = 2$	12
5.	Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse für die Funktion $f(x) = 4x^3 - 2x$ für das Intervall $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.	17

Lösungen

Aufg.	Lösung(svorschlag)	Punkte
1.	Eine Stammfunktion F(x) ist die „Aufleitung“ der Ausgangsfunktion f(x). Es gilt der Zusammenhang: $F'(x)=f(x)$ Für das Beispiel gilt: $f(x)=x^2-1 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}x^3-x$	2 1 2
	Mit Hilfe des Integrals kann man Flächen berechnen. Man missachtet bei der Berechnung jedoch eventuelle Nullstellen und negative Vorzeichen beim Ergebnis. Im Beispiel gilt: $\int_0^3 (x^2-1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^3=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3-0=6$	0,5 1 2
	Der Flächeninhalt wird ermittelt, indem man von einer Nullstelle zur nächsten bzw. zu den Grenzen des Intervalls die Integrale addiert. Im Beispiel ist im Intervall [0;3] eine Nullstelle bei x=1. Es gilt: $A_{Gesamt}=\left\|A_{[0;1]}\right\|+\left\|A_{[1;3]}\right\|$	1 1 1 1
	$A_{[0;1]}=\left\|\int_0^1 (x^2-1dx)\right\|=\left\|\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1\right\|=\left\|\frac{1}{3}-1-0\right\|=\left\|-\frac{2}{3}\right\|=\frac{2}{3}$	1
	$A_{[1;3]}=\left\|\int_1^3 (x^2-1dx)\right\|=\left\|\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^3\right\|$ $=\left\|\frac{1}{3}\cdot 3^3-3-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\|$ $=\left\|6\frac{2}{3}\right\|$ $=6\frac{2}{3}$	 1
	$A_{Gesamt}=\frac{2}{3}+6\frac{2}{3}=7\frac{1}{3}FE$	2
2.	Die Kästchenbreite beträgt $\frac{1}{n}$. Dann gilt:	0,5
	$A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+...+f\left(\frac{x_0n-1}{n}\right)\right)$ $\Leftrightarrow A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1^3}{n^3}+\frac{2^3}{n^3}+\frac{3^3}{n^3}+...+\frac{(x_0n-1)^3}{n^3}\right)$ $\Leftrightarrow A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\left(1^3+2^3+3^3+...+(x_0n-1)^3\right)$	2 1
	Für alle natürlichen Zahlen 1, 2, 3, …, k gilt: $1^3+2^3+3^3+...+k^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$ Somit gilt für A:	

	$k = x_0 n - 1$	
	$A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3\right)$	
	$\Leftrightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \left(\frac{1}{4} k^2 (k+1)^2\right)$	
	$\Leftrightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \left(\frac{1}{4} k^2 \cdot (k^2 + 2k + 1)\right)$	
	$\Leftrightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot (x_0^2 n^2 - 2x_0 n + 1) \cdot (x_0^2 n^2 - 2x_0 n + 1 + 2x_0 n - 2 + 1)\right)$	2
	$\Leftrightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot (x_0^4 n^4 - 2x_0^3 n^3 + x_0^2 n^2)\right)$	
	$\Leftrightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \left(\frac{1}{4} x_0^4 n^4 - \frac{1}{2} x_0^3 n^3 + \frac{1}{4} x_0^2 n^2\right)$	
	$\Leftrightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_0^4 n^4}{4n^4} - \frac{x_0^3 n^3}{2n^4} + \frac{x_0^2 n^2}{4n^4}$	1,5
	$\Leftrightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_0^4 n^4}{4n^4} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_0^3 n^3}{2n^4} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_0^2 n^2}{4n^4}$	1
	$\Leftrightarrow A = \frac{1}{4} x_0^4$	2
	q.e.d.	
3.	Vor der Flächenberechnung müssen eventuelle Nullstellen ermittelt werden:	
	$0 = x^3 \Leftrightarrow x = 0$	2
	$A_{Gesamt} = \left\|A_{[-2;0]}\right\| + \left\|A_{[0;5]}\right\|$	1
	$\Leftrightarrow A_{Gesamt} = \left\|\int_{-2}^{0} x^3 dx\right\| + \left\|\int_{0}^{5} x^3 dx\right\|$	1
	$\Leftrightarrow A_{Gesamt} = \left\|\left[\frac{1}{4} x^4\right]_{-2}^{0}\right\| + \left\|\left[\frac{1}{4} x^4\right]_{0}^{5}\right\|$	1
	$\Leftrightarrow A_{Gesamt} = \left\|0 - \frac{1}{4} \cdot (-2)^4\right\| + \left\|\frac{1}{4} \cdot 5^4 - 0\right\|$	1
	$\Leftrightarrow A_{Gesamt} = \|-4\| + \|156{,}25\|$	
	$\Leftrightarrow A_{Gesamt} = 160{,}25 FE$	2
4.	a)	
	$\int_{-2}^{0} (x^2 - k^2) dx = 0$	
	$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{3} x^3 - k^2 x\right]_{-2}^{0} = 0$	1
	$\Leftrightarrow 0 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + k^2 \cdot (-2) = 0$	1
	$\Leftrightarrow \frac{8}{3} - 2k^2 = 0$	
	$\Leftrightarrow k^2 = \frac{4}{3}$	
	$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
	b)	
	$\int_{0}^{k} \frac{1}{2} x^2 dx = 4$	

	$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^k = 4$	1
	$\Leftrightarrow \frac{1}{6}k^3 - 0 = 4$	1
	$\Leftrightarrow k^3 = 24$	
	$\Leftrightarrow k = \sqrt[3]{24} (\approx 2{,}88)$	2
	c)	
	$\int_0^k \left(k^2x + kx^2\right)dx = 2$	
	$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1}{3}kx^3\right]_0^k = 2$	1
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k^2 \cdot k^2 + \frac{1}{3}k \cdot k^3 - 0 = 2$	1
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k^4 + \frac{1}{3}k^4 = 2$	
	$\Leftrightarrow \frac{5}{6}k^4 = 2$	
	$\Leftrightarrow k^4 = \frac{12}{5}$	
	$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt[4]{\frac{12}{5}} (\approx \pm 1{,}24)$	2
5.	Nullstellenermittlung:	
	$0 = 4x^3 - 2x$	
	$\Leftrightarrow 0 = x \cdot \left(4x^2 - 2\right)$	
	$\Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 2 = 0$	
	$\Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 = 2$	
	$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{2}$	
	$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$	2
	Die Gesamtfläche setzt sich aus vier Einzelflächen zusammen:	
	$A_{Gesamt} = \left\lvert A_{\left[-\sqrt{2};-\sqrt{\frac{1}{2}}\right]} \right\rvert + \left\lvert A_{\left[-\sqrt{\frac{1}{2}};0\right]} \right\rvert + \left\lvert A_{\left[0;\sqrt{\frac{1}{2}}\right]} \right\rvert + \left\lvert A_{\left[\sqrt{\frac{1}{2}};\sqrt{2}\right]} \right\rvert$	1
	$A_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-\sqrt{\frac{1}{2}}} 4x^3 - 2x\,dx = \left[x^4 - x^2\right]_{-\sqrt{2}}^{-\sqrt{\frac{1}{2}}}$	2
	$\Leftrightarrow A_1 = \left(\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4 - \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right) - \left(\left(-\sqrt{2}\right)^4 - \left(-\sqrt{2}\right)^2\right)$	
	$\Leftrightarrow A_1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (4 - 2)$	
	$\Leftrightarrow A_1 = -\frac{1}{4} - 2$	
	$\Leftrightarrow A_1 = -2\frac{1}{4}$	1

	$A_2 = \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}}}^{0} 4x^3 - 2x\,dx = \left[x^4 - x^2\right]_{-\sqrt{\frac{1}{2}}}^{0}$	2
	$\Leftrightarrow A_2 = 0 - \left(\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4 - \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right)$	
	$\Leftrightarrow A_2 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$	
	$\Leftrightarrow A_2 = \frac{1}{4}$	1
	$A_3 = \int_{0}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} 4x^3 - 2x\,dx = \left[x^4 - x^2\right]_{0}^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$	2
	$\Leftrightarrow A_3 = \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4 - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right) - 0$	
	$\Leftrightarrow A_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$	
	$\Leftrightarrow A_3 = -\frac{1}{4}$	1
	$A_4 = \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{2}} 4x^3 - 2x\,dx = \left[x^4 - x^2\right]_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{2}}$	2
	$\Leftrightarrow A_4 = \left(\left(\sqrt{2}\right)^4 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right) - \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4 - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right)$	
	$\Leftrightarrow A_4 = (4-2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$	
	$\Leftrightarrow A_4 = 2 - \left(-\frac{1}{4}\right)$	
	$\Leftrightarrow A_4 = 2\frac{1}{4}$	1
	$A_{Gesamt} = \left\|-2\frac{1}{4}\right\| + \left\|-\frac{1}{4}\right\| + \left\|\frac{1}{4}\right\| + \left\|2\frac{1}{4}\right\| = 5FE$	2

Bewertungskriterien

Erreichte Punktzahl	Notenpunkte	Note
63,5 - 60	15	Sehr gut plus (1^+)
59 - 57	14	Sehr gut (1)
56 - 54	13	Sehr gut minus (1^-)
53 - 51	12	Gut plus (2^+)
50 - 48	11	Gut (2)
47 - 44	10	Gut minus (2^-)
43 - 41	9	Befriedigend plus (3^+)
40 - 38	8	Befriedigend (3)
37 - 35	7	Befriedigend minus (3^-)
34 - 32	6	Ausreichend plus (4^+)
31 - 29	5	Ausreichend (4)
28 - 25	4	Ausreichend minus (4^-)
24 - 21	3	Mangelhaft plus (5^+)
20 - 17	2	Mangelhaft (5)
16 - 13	1	Mangelhaft minus (5^-)
12 - 0	0	Ungenügend (6)

Hellgrüner Bereich:
Ein tolles Ergebnis! Weiter so!!!

Grüner Bereich:
Keineswegs zu verachten! Eine gute Leistung, auch wenn leichte Wissenslücken bestehen.

Helloranger Bereich:
Die Grundlagen bestehen auf jeden Fall, es muss lediglich sorgfältiger gelernt zu werden. Es empfiehlt sich, auch mal im Forum (http://www.lern-online.net/forum/) vorbeizuschauen.

Orangener Bereich:
Es besteht recht hoher Nachholbedarf. Wiederholen Sie die Kapitel, in denen Sie Fehler gemacht haben und versuchen Sie sich noch mal an diesen Aufgaben!!!

Roter Bereich:
Sie sollten sich nochmals alle bisher behandelten Kapitel genau durchlesen. Eine Hilfe sind immer Notizen. Diese sollten Sie natürlich nicht bei der Aufgabenbewältigung benutzen. Schauen Sie sich auch im Forum um!

Wie werden die Punkte verteilt?

Die Aufgaben sind für die Punkte ausschlaggebend. Neben der Aufgabenstellung finden Sie immer die erreichbare Punktzahl. In der Lösung werden Sie auch genauer sehen, wofür es Punkte gab. Da Sie alleine arbeiten, ist es unsinnig, sich selbst mehr Punkte zu geben, als eigentlich gedacht. Es gibt keine Sonderpunkte, wenn Sie die Aufgaben in besonderem Maße erfüllt haben. Seien Sie ehrlich zu sich selbst.