Die Bernoullische Ungleichung

Die Bernoullische Ungleichung (nach Johann Bernoulli) lautet:

$$\boxed{(1+a)^n > 1 + an \text{ für jedes } a \in R > -1 \text{ und jedes } n \in N \geq 2}$$

Beweis

Die Bernoullische Ungleichung beweist man mittels *vollständiger Induktion*:

1. Induktionsbeginn: Für $n = 2$ gilt offensichtlich:

$$(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$$

2. Induktionsschritt: wenn $(1+a)^n > 1 + an$ für ein bestimmtes n gilt, gilt es auch für $n+1$. Dazu multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit $(1+a)$:)[1]

$$\begin{aligned} (1+a)^n &> 1 + an \\ (1+a)^n \cdot (1+a) &> (1+na)(1+a) \\ (1+a)^{n+1} &> 1 + a + na + na^2 \end{aligned}$$

Da nun offensichtlich

$$1 + a + na + na^2 > 1 + a + na$$

gilt, kann man auch folgern:

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &> 1 + a + na \\ (1+a)^{n+1} &> 1 + a(n+1) \end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen

[1] Dies gilt nur, wenn $1 + a > 0$ gilt, was durch $a > -1$ gegeben ist. Zur Erinnerung: Multipliziert man beide Seiten einer Ungleichung mit einem *negativen* Wert, so muss man das Ungleichungszeichen „umdrehen“

