Beweis der Potenzregel

(Differenzialrechnung, Analysis)

1. Behauptung:

Für die Funktion $f(x) = x^n$ ist die Ableitungsfunktion $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

2. Beweis:

Da uns nichts anderes bekannt ist, müssen wir zum Beweis dieser Regel den Differenzialquotienten bilden. Im Falle $f(x) = x^n$ wäre dieser:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Und da haben wir auch schon ein Problem: da n nicht bekannt ist, können wir nicht eindeutig bestimmen, was $(x+h)^n$ ist. Also müssen wir da ein wenig improvisieren. Schauen wir uns das mal näher an, und zwar am Beispiel $(x+h)^2$:

$(x+h)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot h + h^2$ (1. Binomische Formel)

Bei $(x+h)^3$ könnte man so lösen:

$(x+h)^3 = (x+h)^2 \cdot (x+h) = (x^2 + 2 \cdot x \cdot h + h^2) \cdot (x+h) = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot h + 3 \cdot x \cdot h^2 + h^3$

Nun könnte man das für jedes n machen, aber das würde ziemlich lange dauern. Daher lassen wir das lieber. Auffällig ist nur der Exponent bei x und bei h. Er beginnt für x immer mit der Zahl, die in der Ausgangsgleichung die Potenz war (also 2 bzw. 3 in den Beispielen oben) und wird dann immer kleiner, bis sie 0 ist.

Beim h ist es genau umgekehrt. Es fängt bei 0 an und hört bei n auf. Bleibt nur noch fraglich, wie die Faktoren vor x bzw. h entsteht. Aber auch hier hat die Mathematik etwas zu bieten: das PASCALsche Dreieck:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Jede Zeile des Dreiecks beginnt und endet mit einer 1. Das trifft auch bei den Formeln oben zu, da sie nichts vor dem x stehen haben, und „nichts“ der Faktor 1 ist. Als nächstes ging es weiter mit 2 bzw. 3. In der 3. und 4. Zeile des Dreiecks geht es ebenfalls so weiter. Im ersten Beispiel sind wir schon am Ende der Reihe mit einer 1, und auch hier ist das Dreieck bei der 1. Im zweiten Beispiel geht es weiter mit einer 3 und dann wieder eine 1, genau wie im PASCALschen Dreieck.

Tatsächlich ist es so, dass das PASCALsche Dreieck uns die so genannten *Binomialkoeffizienten* liefert, also die Zahlen, die vor den einzelnen Termen stehen. Nehmen wir als letztes Beispiel $(x+h)^6$:

$(x+h)^6 = 1 \cdot x^6 \cdot h^0 + 6 \cdot x^5 \cdot h^1 + 15 \cdot x^4 \cdot h^2 + 20 \cdot x^3 \cdot h^3 + 15 \cdot x^2 \cdot h^4 + 6 \cdot x^1 \cdot h^5 + 1 \cdot x^0 \cdot h^6$

Wir können so ganz einfach mit Hilfe dieses Dreiecks jede Summen-Potenz berechnen. Schauen wir uns nun einmal den blau markierten Teil des PASCALschen Dreiecks an. In beiden Richtungen wird die Zahl immer um 1 höher. Das liegt an der Bildungsvorschrift der Zahlen. Nehmen wir z.B. die Reihe 1 – 4 – 6 – 4 – 1. Dazu müssen wir in die Reihe darüber sehen. Die 1 bleibt erhalten. Die 4 kommt zustande, weil in der vorherigen Reihe 1 und 3 addiert wurden. Die 6 kommt zustande, weil in der Reihe davor beide 3en addiert wurden. Die vier kommt wieder zustande durch Addition von 1 und 3 und die 1 am Ende bleibt wieder erhalten.

So macht man das bei jeder einzelnen Zeile. Man addiert zwei Werte und schreibt in die Mitte unter sie ihr Ergebnis. Daher muss auch die zweite Zahl immer um 1 steigen bei jedem Durchgang, da immer die Zahl rechts darüber mit der Zahl links darüber addiert wird, also die Zahl rechts immer um 1 erhöht wird.
Im Falle von n wäre also der erste Binomialkoeffizient 1 und der zweite n. Alle weiteren können wir leider nicht bestimmen, da n nicht gegeben ist. Aber das reicht ja auch schon völlig aus. Der Term von oben sieht also jetzt in etwa so aus (wobei „?“ ein unbekannter Binomialkoeffizient ist):

$$f'(x) = \lim_{h \sim 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \sim 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \lim_{h \sim 0} \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot h + ?\cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \ldots + ?\cdot x^1 \cdot h^{n-1} + n \cdot h^n - x^n}{h}$$

Die drei Punkte stehen für die Terme, die dazwischen noch liegen, da n unbekannt ist, ist auch deren Anzahl unbekannt. Zu Beginn der Zeile steht x^n, am Ende $-x^n$. Das Ergibt insgesamt 0, entfällt also. Wir haben also:

$$f'(x) = \lim_{h \sim 0} \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot h + ?\cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \ldots + ?\cdot x^1 \cdot h^{n-1} + n \cdot h^n}{h}$$

In jedem Term kommt jetzt h vor, egal, zu welcher Potenz, immer mindestens 1. Damit können wir das ausklammern:

$$f'(x) = \lim_{h \sim 0} \frac{h \cdot \left(n \cdot x^{n-1} + ?\cdot x^{n-2} \cdot h^1 + \ldots + ?\cdot x^1 \cdot h^{n-2} + n \cdot h^{n-1}\right)}{h}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \lim_{h \sim 0} n \cdot x^{n-1} + \lim_{h \sim 0} ?\cdot x^{n-2} \cdot h^1 + \lim_{h \sim 0} \ldots + \lim_{h \sim 0} ?\cdot x^1 \cdot h^{n-2} + \lim_{h \sim 0} n \cdot h^{n-1}$$

Lassen wir nun in jedem Term h=0 werden, da h nicht mehr im Nenner steht, so ergibt sich:

$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, also die Gleichung, die wir beweisen wollten!!!

w.z.b.w.

(was zu beweisen war)