Einführung in die Mengenlehre

Kevin Kaatz, Lern-Online.net

im Mai 2009

Lern-Online.net

Mathematik-Portal

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort und Definition

1.1 Vorwort und Literaturempfehlungen

Die Mengenlehre ist ein Themengebiet der Mathematik, das in der Schule – wenn überhaupt – nur sehr kurz und knapp dargestellt wird. Die Arbeit mit Mengen ist in der Universitätsmathematik gerade am Anfang wichtig, und oft werden bestimmte Kenntnisse vorausgesetzt.

Wir werden uns in diesem Dokument mit dem Mengenbegriff auseinandersetzen und einige grundlegende Rechenoperationen mit Mengen besprechen. Als weiterführende Lektüre sei hier das Buch von Klaus Fritzsche[1] oder ein anderes einführendes Werk empfohlen.

1.2 Der Mengenbegriff

Die folgende Definition einer Menge geht auf Georg Cantor zurück. Durch Cantor gewann die Mengenlehre enorm an Bedeutung, nachdem er bewiesen hat, dass die Menge der Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ überabzählbar ist[2]. Zum Begriff der (Über-)Abzählbarkeit später mehr.

Definition
Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte werden Elemente von M genannt.

Aus dieser Definition geht hervor, dass Mengen – entgegen der Intuition – neben Zahlen auch beliebige andere Objekte enthalten können. Betrachten wir einige

Beispiele

1. $M = \{1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{N}$ ist die Menge der Natürlichen Zahlen[3].

2. $A_1 = \{$Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, Samstag, Sonntag$\}$ ist die Menge der Wochentage.

3. $A_2 = \{$Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag$\}$ ist die Menge der Werktage[4].

4. $A_3 = \{$Samstag, Sonntag$\}$ ist die Menge der Wochenendtage.

5. $M = \{a, b, c, ..., z\}$ ist die Menge aller (regulären) Kleinbuchstaben des Alphabets.

Bemerkung: Schreibweise
Wie aus den Beispielen hervorgeht, werden Mengen durch geschweifte Klammern $\{$ und $\}$ umfasst. Betrachten wir die Menge A_2 nochmals. Wir schreiben:

[1]Literaturverz. [2]
[2]vgl. [1], S. 298 (Kapitel 14)
[3]Zu dieser Menge wird von vielen Mathematikern auch die Null gezählt. Wir werden in diesem Vorkurs die Menge mit 1 beginnen lassen.
[4]Rechtlich gesehen zählt auch der Samstag zu dieser Menge.

Montag $\in A_2$, wenn Montag ein Element von A_2 ist
Sonntag $\notin A_2$, wenn Sonntag kein Element von A_2 ist.

Das $\in$-Symbol liest man als $a \in M$: *a ist Element von* M[5].

[5] Oder: *a liegt in M.*

2 Teilmengen und Mengengleichheit

2.1 Teilmengen

Betrachten wir nochmals die Beispiele aus 1.2:

Beispiele

1. $A_1 = \{$Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, Samstag, Sonntag$\}$ ist die Menge der Wochentage.

2. $A_2 = \{$Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag$\}$ ist die Menge der Werktage.

3. $A_3 = \{$Samstag, Sonntag$\}$ ist die Menge der Wochenendtage.

Wir sehen, dass alle Elemente aus A_2 auch in A_1 liegen. Auch die Elemente von A_3 liegen alle in A_1. Wir nennen A_2 und A_3 daher Teilmengen von A_1[6]. Allgemein gilt die folgende

Definition
Seien T und M zwei Mengen. T heißt eine Teilmenge von M, falls jedes Element von T auch ein Element von M ist.

Schreibweise
Wir schreiben in diesem Fall $T \subset M$.

Beispiele

1. $A_2 \subset A_1$

2. $A_3 \subset A_1$

3. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$[7]

4. Seien $A = \{1, 2, \{1, 3\}, 4\}$ und $B = \{1, 3\}$. Dann gilt $B \in A$. Sei ferner $C = \{1, 2, 4\}$, dann ist $C \subset A$.

Man achte besonders bei Beispiel 4 darauf, dass B ein Element von A ist[8]!

2.2 Gleichheit von Mengen

Definition
Zwei Mengen A und B heißen gleich, wenn sie die gleichen Elemente besitzen. Wir schreiben dann $A = B$.

[6]In diesem Fall sogar *echte* Teilmengen.
[7]Wir setzen hier einmal die Kenntnis über die Standard-Zahlenmengen voraus.
[8]Wir werden beim Begriff der Potenzmenge noch genauer auf Teilmengen eingehen.

<u>Satz</u> 2.1
Seien A und B zwei Mengen. Genau dann, wenn $A = B$ gilt, gilt auch $A \subset B$ und $B \subset A$.

Beweis
Die Formulierung *genau dann, wenn* bedeutet in der Mathematik oft, zwei Richtungen zeigen zu müssen. In unserem Satz wären das:

- $A = B \Rightarrow A \subset B \wedge B \subset A$[9] („$\Rightarrow$")
- $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$ („$\Leftarrow$")

<u>„$\Rightarrow$"</u>:

1. Sei $A = B$ vorausgesetzt (d.h., wir dürfen annehmen, dass $A = B$ gilt). Nach der Definition bedeutet das, dass A und B die gleichen Elemente haben. Sei x ein beliebiges Element von A. Dann ist x auch ein Element von B für alle x. Damit liegt jedes $x \in A$ auch in B, was nach Definition eben genau $A \subset B$ bedeutet.

2. Sei nun umgekehrt y ein beliebiges Element. Wegen der Gleichheit von A und B ist damit auch y in A für alle $y \in B$. Damit folgt aus der Definition von Teilmengen sofort $B \subset A$.

Aus (1.) und (2.) folgt die Behauptung $A = B \Rightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

<u>„$\Leftarrow$"</u>:
Sei also nun $A \subset B \wedge B \subset A$ vorausgesetzt. Zu zeigen: A und B besitzen die gleichen Elemente. Aus $A \subset B$ folgt, das B alle Elemente aus A enthält. Aus $B \subset A$ folgt, dass A alle Elemente aus B enthält. Damit kann es kein Element $a \in A$ geben, das nicht in B liegt (bzw. kein Element $b \in B$, das nicht auch in A liegt). Damit besitzen A und B die gleichen Elemente und es gilt nach Definition $A = B$.$\square$

Bemerkungen
Der Kasten $\square$ bedeutet, dass der Beweis hier vollbracht ist und die Behauptung damit vollständig bewiesen wurde.

Ich will noch einige Worte zum Beweis an sich verlieren. In der Mathematik muss ein Satz vollständig bewiesen werden. Es hätte ebensowenig gereicht, nur die Hin-Richtung („$\Rightarrow$") zu beweisen, wie nur die Rück-Richtung („$\Leftarrow$") zu zeigen. Beide Richtungen müssen bewiesen werden, sonst gilt der Satz so nicht.

Was bedeutet der Satz nun für die Praxis? Dieser Satz kann immer dann angewendet werden, wenn die Aufgabenstellung lautet: „Zeigen Sie, dass $M = N$ gilt!". Das Verfahren ist dann oft, dass man zunächst zeigt, dass $M \subset N$ richtig ist und danach noch zeigt, dass $N \subset M$ richtig ist. Daraus folgt dann mit dem Satz die Gleichheit von M und N.

Bezeichnung / Schreibweise
In der Mathematik werden Mengen oft in folgender Form definiert:

[9] $\wedge$ bedeutet *und*.

$$A = \{x \in \mathbb{R} | E(x)\},$$

wobei $E(x)$ eine Eigenschaft von x darstellen soll. Ein praktisches Beispiel:

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x \notin \mathbb{Q}\}$$

Gelesen wird dies folgendermaßen: „A ist gleich die Menge aller x aus $\mathbb{R}$, sodass x nicht in $\mathbb{Q}$ liegt“. Auf der linken Seite innerhalb der Mengenklammern $\{\ \}$ steht dabei, um welche Gesamtmenge es sich handeln soll (in diesem Beispiel die Menge aller x aus $\mathbb{R}$). Auf der rechten Seite stehen dann einschränkende oder erläuternde Bedingungen, hier also zum Beispiel, dass x keine rationale Zahl sein darf.

In diesem Beispiel wären z.B. $\pi, \sqrt{2} \in A$, wohingegen z.B. $0, -\frac{3}{2} \notin A$ wären, da sowohl die Null als auch $-\frac{3}{2}$ in $\mathbb{Q}$ liegen.

2.3 Die leere Menge

Definition
Die <u>leere Menge</u> ist die Menge, die überhaupt kein Element besitzt. Wir schreiben $\emptyset$= leere Menge.

Bemerkung
Sei A eine beliebige Menge. Dann gilt $\emptyset \subset A$ und $A \subset A$.

Diese Bemerkung schein zunächst trivial, ihre Bedeutung wird aber nochmals eine wichtige Rolle bei den Potenzmengen spielen, um die es im nächsten Abschnitt geht.

2.4 Die Potenzmenge

Definition
Sei A eine Menge. Die <u>Potenzmenge</u> von A ist die Menge aller Teilmengen von A, in Zeichen:

$$\mathfrak{P}(A) = \{X | X \text{ ist eine Menge, und } X \subset A\}$$

Beispiele

1. Sei $A = \{a, b\}$, dann ist $\mathfrak{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$.

2. Sei $A = \{1, 2, 3\}$, dann ist $\mathfrak{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$.

Definition
Sei A eine Menge. Die <u>Mächtigkeit</u> von A ist die Anzahl der Elemente in A. Wir schreiben: $|A| = \#A =$ Mächtigkeit von A.

Beispiele

1. Sei $A = \{a, b, c\}$, dann ist $|A| = 3$.

2. Sei $A = \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, dann ist $|A| = \infty$.

Satz 2.2
Sei A eine Menge der Mächtigkeit $|A| = n$ $(n \in \mathbb{N})$, dann gilt für ihre Potenzmenge $|\mathfrak{P}(A)| = 2^n$.

Beweis durch Induktion über n[10]
Induktionsanfang: sei $n = 1$, d.h. die Menge A enthält nur ein Element: $A = \{a\}$. Damit ist $\mathfrak{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}\big\}$. Die Mächtigkeit der Potenzmenge ist also offenbar $|\mathfrak{P}(A)| = 2^1 = 2^n$.

Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage gelte für n. Zu zeigen: die Aussage gilt auch für $n+1$. Sei $|A| = n+1$. Die ersten n Elemente von A liefern nach Induktionsvoraussetzung eine 2^n-elementige Potenzmenge. Das weitere $(n+1)$-te Element wird mit jedem der anderen 2^n Elemente außer der leeren Menge zusätzlich gepaart und einmal selbst als eigenständige Menge hinzugefügt, sodass weitere 2^n Paarungen auftreten. Mit den alten 2^n Paaren ergibt sich dann $|\mathfrak{P}(A)| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. $\square$

[10] Das Verfahren der vollständigen Induktion ist ein sehr gängiges und häufig verwendetes Beweisverfahren für natürliche Zahlen. Wir behandeln dieses Thema eigens in einem Dokument dieses Vorkurses.

2.5 Aufgaben zu Kapitel 2

Diese Aufgaben dienen der Selbstüberprüfung. Die Lösungen werdeödiret(Ki)(Ln)(A)3bslussgegeben (e2.417321ni)-403-821(g2.41732((e2.417321ni)346.1368ui)-5

2.6 Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 2.1
$|A| = \infty$, *da es unendlich viele rationale Zahlen gibt.*

Lösung zu Aufgabe 2.2
zu (i):
A ist die Menge aller Zahlen x aus $\mathbb{R}$, *sodass* $2x^2 = 8$ *gilt. Wir schauen uns B an und stellen fest, dass alle Elemente aus B (d.h. 2) auch in A liegen, denn* $2 \cdot 2^2 = 8 \Rightarrow 2 \in A$. *Damit gilt* $B \subset A$.
zu (ii):
Die Gleichung $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ *besagt, dass wir A schreiben können als* $A = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 = 8\} = \{-2, 2\} = C$.
zu (iii):
Wir wissen aus (ii) bereits, dass $A = C = \{-2, 2\} \subset D = \mathbb{Q}$. □

Lösung zu Aufgabe 2.3
A besitzt drei Elemente, aus Satz 2.2 folgt damit, dass $|\mathfrak{P}(A)| = 2^3 = 8$.

Lösung zu Aufgabe 2.4
$\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\mathfrak{P}\big(\mathfrak{P}(\emptyset)\big) = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$

3 Vereinigung, Schnitt und Differenz

deeN16075(15(e)1.96101(n-3495.622(u)2.36328(n)2.36328(d)-38.635(e)1.96045(i)1.35508(n)2.36328ii)1.35028(g)2.1

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

wobei $\vee$ „oder" bedeutet.[12]

Bemerkung
Seien A und B zwei nicht-disjunkte Mengen, d.h. es existiert (mindestens) ein $x \in A \cap B$, dann wird dieses Element x nicht doppelt aufgezählt, wenn man die Vereinigung von A und B aufschreibt. Die Vereinigung $A \cup B$ ist selbst eine Menge, und nach Definition einer Menge müssen die Elemente in ihr *wohlunterschieden* sein, d.h. z.B.: $\{1, 2, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$. Auch die Reihenfolge der Elemente spielt in Mengen keine Rolle: $\{1, 3, 2\} = \{1, 2, 3\}$.

Beispiele

1. Seien $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{4, 6, 7, 10\}$, dann ist $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$.[13]
2. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$
3. Sei $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 4x - 5 = 0\}$, dann ist $(A \cap \mathbb{R}_+) \cup (A \cap \mathbb{R}_-) = \{-5, 1\}$.
4. $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$[14]

3.3 Die Differenz

Definition
Seien A und B Mengen. Dann ist die Differenz definiert als

$$A \backslash B := \{x \in A | x \notin B\}$$

Das bedeutet, dass $A \backslash B$ die Menge aller Elemente aus A ist, die *nicht* in B liegen.

Beispiele

1. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \backslash \{1, 3, 5\} = \{2, 4\}$
2. $\mathbb{N} \backslash \mathbb{Q} = \emptyset$
3. $\mathbb{R} \backslash \{0\} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$

[12] Zum mathematischen „Oder" siehe unsere Einführung in die Logik. Was bedeutet das nun? Ganz einfach: $A \cup B$ ist die Menge aller x, die in A oder eben in B enthalten sind. Es erhellt damit sofort, dass $A, B \subset (A \cup B)$ gilt, da jedes Element aus A und B auch in $A \cup B$ enthalten ist.

[13] Hier wird nochmals der Sinn des mathematischen „Oder" deutlich: zwar ist die 4 sowohl in A als auch in B enthalten, allerdings meint *oder* hier nicht *entweder, oder*!

[14] Natürlich gilt dann $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \cup \{0\}$

3.4 Aufgaben zu Kapitel 3

Diese Aufgaben dienen der Selbstüberprüfung. Die Lösungen werden direkt im Anschluss gegeben.

Aufgabe 3.1
Sei $A = \{2, 4, 6, ...\}$ *die Menge der geraden natürlichen Zahlen und* $B = \{1, 3, 5, ...\}$ *die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen. Notieren Sie folgende Mengen:*

(i) $A \cup B$

(ii) $A \cap B$

(iii) $A \backslash B$

(iv) $B \backslash A$

Aufgabe 3.2 – *Das Komplement*
Es sei G *eine Grundmenge, sodass für eine Menge* A *gilt:* $A \subset G$*. Wir definieren das* _Komplement_ A' *von* A *als* $A' := G \backslash A$*.*

Sei $B \subset G$ *eine Menge, sodass* $B \cap A = \emptyset$ *gilt. Man zeige, dass* $B \subset A'$ *gilt. Ändert sich die Aussage, wenn* $B \cap A \neq \emptyset$ *gilt?*

Aufgabe 3.3 – *Definition des Kreises*[15]
Wir nehmen nun den Raum $\mathbb{R}^2$ *(d.h. die Ebene mit x- und y-Achse) als gegeben an. Ferner definieren wir mit* $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ *den Abstand zwischen den Punkten* $x = (x_1, x_2)$ *und* $y = (y_1, y_2)$*.*

Man beschreibe mit Hilfe der Mengenschreibweise die Kreisscheibe um $p \in \mathbb{R}^2$ *mit dem Radius* r*. Der Rand der Kreisscheibe selbst soll auch enthalten sein. Ferner beschreibe man den Kreis (d.h. nur den Rand) um* p *mit dem Radius* r*.*

Hinweis: *Man überlege, welche Eigenschaft alle Punkte der Kreisscheibe im Bezug auf den Punkt* p *haben.*

Aufgabe 3.4 – *Regeln von De Morgan*
Seien A, B *und* C *Mengen. Man zeige:*

(i) $B \backslash (A \cup C) = (B \backslash A) \cap (B \backslash C)$

(ii) $B \backslash (A \cap C) = (B \backslash A) \cup (B \backslash C)$

[15] Zur reellen Zahlenebene werden wir erst im nächsten Abschnitt kommen können. Es dürfen daher die Kenntnisse aus der Schule verwendet werden.

3.5 Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 3.1

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. $A \backslash B = \{2, 4, 6, ...\} = A$
4. $B \backslash A = \{1, 3, 5, ...\} = B$

Lösung zu Aufgabe 3.2
Sei $x \in B$ beliebig. Wegen $B \cap A = \emptyset$ wissen wir, dass $x \notin A$ gilt. Damit ist $x \in A'$, da $A' = G \backslash A = \{x \in G | x \notin A\}$. Wegen der Beliebigkeit von x ist damit ganz B in A' enthalten. □

Sei nun $B \cap A \neq \emptyset$. Es existiert also ein $x \in (B \cap A) \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \notin A'$. Es folgt, dass B keine Teilmenge von A' mehr ist.

Lösung zu Aufgabe 3.3
Kreisscheibe: $\{x \in \mathbb{R}^2 | d(x, p) \leq r\}$
Kreisrand: $K_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 | d(x, p) = r\}$

Lösung zu Aufgabe 3.4
zu (i)

$$\begin{aligned} B \backslash (A \cup C) &= \{x \in B | x \notin A \cup C\} \\ &= \{x \in B | x \notin A \text{ und } x \notin C\} \\ &= \{x \in B | x \notin A\} \cap \{x \in B | x \notin C\} \\ &= (B \backslash A) \cap (B \backslash C) \end{aligned}$$

zu (ii)
analog zu (i).[16] □

[16] Warum ergibt *und* denn nun $\cap$? Ganz einfach: so hatten wir es definiert! $X \cap Y = \{x | x \in X \text{ und } x \in Y\}$

4 Das Kreuzprodukt

4.1 Vorwort und Definition

Bereits in den Aufgaben zum 3. Kapitel mussten wir die Ebene $\mathbb{R}^2$ als bekannt voraussetzen, ohne sie wirklich ordnungsgemäß eingeführt zu haben.

Das werden wir im vorliegenden Kapitel nun nachholen. Das Kreuzprodukt wird uns an späterer Stelle in diesem Vorkurs, insbesondere bei Abbildungen, wieder begegnen und ist im gesamten Studienverlauf basalstes Grundwissen. Anschließend werden wir als kleinen Ausblick eine kurze Einführung in die Abbildungen geben, um direkt die praktische Anwendung des Kreuzprodukts kennenzulernen.

Definition
Es seien A und B zwei Mengen. Das Kreuzprodukt von A und B ist definiert durch

$$A \times B := \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

Das bedeutet, dass $A \times B$ die Menge der geordneten Paare (a,b) mit Elementen $a \in A$ und $b \in B$ ist.

Bemerkung
Im Gegensatz zu Mengen spielt die Reihenfolge der Elemente beim Kreuzprodukt eine wichtige Rolle:

$$\{1,2,3,4,5\} = \{2,5,4,1,3\}$$

Aber:

$$(a,b) \neq (b,a)$$

Beispiele

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 =$ die allseits bekannte Ebene: wir stellen uns darunter z.B. $(2, -\sqrt{2})$ vor, wobei wir den Wert 2 auf der x-, den Wert $-\sqrt{2}$ auf der y-Achse eintragen würden.[17]

2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 =$ der dreidimensionale Raum: $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

3. Seien $A = \{1,2,3,4,5\}$ und $B = \{-1,-2,-3,-4,-5\}$, dann ist z.B. $(3,-2) \in A \times B$, aber $(-3,2) \notin A \times B$.

Schreibweise
Auch das sollte aus der Schule und aus den obigen Beispielen klar sein, aber zur Sicherheit: wir schreiben:

[17] Hier sehen wir auch die Wichtigkeit der Reihenfolge erneut: wir können die Koordinaten nicht einfach vertauschen!

$$\underbrace{A \times A \times ... \times A}_{\text{n mal}} = A^n$$

4.2 Anwendung: Abbildungen

Wir wollen uns nun kurz damit befassen, wo das Kreuzprodukt hauptsächlich zum Einsatz kommen wird: in Abbildungen.

Definition
Seien A und B Mengen. Eine Abbildung ist eine Vorschrift, die jedem Element aus A ein Element aus B zuordnet.[18]

Schreibweise
Sei f eine Abbildung. Man schreibt

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Wobei $f(a) \in B$ gilt.

Beispiele

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; n \mapsto \sqrt{n}$ ist die Abbildung, die jeder natürlichen Zahl ihre Quadratwurzel zuordnet.
2. $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x + y$ ist die Definition der Addition für reelle Zahlen[19]
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{N}; x \mapsto (x, 2)$ ist die Funktion, die ein $x \in \mathbb{R}$ auf den Funktionswert $(x, 2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ schickt, z.B.: $f(5) = (5, 2)$. Man kann f mit der konstanten Geraden durch 2 in der Ebene identifizieren.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; x \mapsto (2, x)$ ist die zur y-Achse parallele Gerade durch $(2, 0)$ – hier wird deutlich, dass eine Abbildung nicht direkt eine Funktion ist.

[18] Man beachte, dass nicht jede Abbildung die Kriterien für eine Funktion erfüllt!

[19] Zum Beispiel wird dem Paar $(-3, 7)$ durch $+$ der Wert 4 zugeordnet. Formal korrekt würde man übrigens schreiben: $+\big((-3, 7)\big) = 4$, d.h. man übergibt der Abbildung $+$ den Funktionswert $(-3, 7)$, genau wie man im Beispiel 1 der Abbildung f den Funktionswert n übergeben hat: $f(n)$

5 Übungen zur Mengenlehre

Unsere Einführung in die Mengenlehre ist an dieser Stelle nu

Literatur

[1] Ebbinghaus, H.-D. et alii: *Zahlen*. Springer Lehrbuch-Verlag. 3. Auflage. Berlin/Heidelberg/New York, 1992.

[2] Fritzsche, K.: *Mathematik für Einsteiger. Vor- und Brückenkurs zum Studienbeginn*. Spektrum-Verlag, 4. Auflage. München, 2007.