Einstieg in die Koordinatengeometrie - lineare Funktionen -

Was ist eine Funktion?

Definition: *Funktion*
Eine Zuordnung $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ heißt Funktion, wenn sie jedem Element $x \in D$ genau eine reelle Zahl y zuordnet.

$$f(x) = y$$

(Gelesen: „f von x ist gleich y")

Das bedeutet also, dass mir eine Funktionen einem x-Wert, den ich ihr übergebe, einen y-Wert liefert. Der x-Wert muss im Definitionsbereich D der Funktion liegen. Das wiederum bedeutet, dass der x-Wert für die Funktion keine mathematischen Regeln verletzt. Ein einfaches Beispiel: gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Diese Funktionsvorschrift gilt für alle x, außer in einem besonderen Fall: wenn $x = 0$ ist. Setzt man 0 nämlich ein, ergäbe sich $f(0) = \frac{1}{0}$, und die Division durch Null ist in der Mathematik nicht gestattet. Den Definitionsbereich der Funktion schreibt man im Normalfall direkt neben die Funktionsgleichung, in etwa so:

$$f(x) = \frac{1}{x}\ ;\ D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(Gelesen: D ist gleich die Menge aller reellen Zahlen außer Null")

Nehmen wir ein x, welches im Definitionsbereich der Funktion liegt, also verschieden von Null ist, z.B. $x = 5$. Dann ergibt sich:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(5) = \frac{1}{5}$$

Ist also der x-Wert gegeben, kann ihm mit der Funktion der y-Wert $\frac{1}{5}$ zugewiesen werden.

Nun gibt es einige Funktionen, bei denen, egal, was man für x einsetzt, bestimmte y-Werte niemals vorkommen können. Eine Beispiel-Funktion wäre hierfür:

$$f(x) = x^2$$

Egal, was man für x einsetzt, y wird niemals negativ (das Quadrieren verhindert dies). Die y-Werte sind Elemente des so genannten Wertebereichs W. Wir stellen für die o.g. Funktion also fest:

$$f(x) = x^2\ ;\ D = \mathbb{R};\ W = \mathbb{R}^{\geq 0}$$

Der Wertebereich ist also ein Element der reellen Zahlen, die größer oder gleich Null sind. Die Schreibweise von oben ($W = \mathbb{R}^{\geq 0}$) kann auch alternativ dargestellt werden mit:

$$W = \mathbb{R}^+$$

Beide Schreibweisen sagen das gleiche aus, da die Null im eigentlichen Sinne auch positiv, zumindest aber „neutral" ist.

Schauen wir uns zur Übung einige Funktionstypen, deren Definitions- und Wertebereiche an:

Lineare Funktion:

$$f(x) = m \cdot x + b\ ;\ D = \mathbb{R};\ W = \mathbb{R}$$

Quadratische Funktion:

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$; a, b, c $\in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; $D = \mathbb{R}$; W ist abhängig von den Koeffizienten a, b und c

Betragsfunktion:
$f(x) = |x|$; D=þ; W= W=þ^{S0}

Intervalle

Intervalle sind Bereiche von Zahlen. Ein Beispiel dafür wären alle Zahlen von 3 bis 12. Es wird in der Mathematik zwischen drei Intervalltypen unterschieden: dem offenen Intervall, dem abgeschlossenen Intervall und dem halboffenen Intervall. Beginnen wir mit dem abgeschlossenen Intervall:
[a;b]
(Gelesen: „abgeschlossenes Intervall von a bis b“)

Das bedeutet, dass ein Element dieses Intervalls jede reelle Zahl zwischen a und b, aber auch a oder b selbst sein kann. Mathematisch schreibt man:
[a;b] = {x g þ | a R x R b}
(Nach dem Gleichheitszeichen gelesen: „x ist Element der reellen Zahlen mit a kleiner/gleich x kleiner/gleich b“)

Der Senkrechte Strich bedeutet soviel wie „mit“. Schauen wir uns nun ein offenes Intervall an.
]a;b[

Im Gegensatz zum abgeschlossenen Intervall kann ein Element im offenen Intervall nur zwischen a und b liegen, aber nicht gleich a oder gleich b sein. Es gilt:
]a;b[= {x g þ | a < x < b}

Nun zum letzten Intervalltypus: dem halboffenen. Das halboffene Intervall ist eine Mischung aus offenem und abgeschlossenem Intervall:
[a;b[bzw.]a;b]

Es gibt also zwei Möglichkeiten für halboffene Intervalle. In der ersten Möglichkeit ist ein Element größer oder gleich a, aber kleiner als b. In der Zweiten ist ein Element größer als a, aber kleiner oder gleich b. Es gilt:
[a;b[= {x g þ | a R x < b} und
]a;b] = {x g þ | a < x R b}

Anwendungsbeispiele

Gegeben sei die Funktion $f(x)=x^3$. Geben Sie die Funktionswerte für die folgenden Stellen (also x-Werte) an:

a) $x=3$
b) $x=5$
c) $x=-\frac{1}{7}$
d) $x=a^2$
e) $x=2a+b$

Wie geht man nun an eine solche Aufgabenstellung heran? Ganz einfach: da der x-Wert gegeben ist, muss dieser lediglich in die Funktionsvorschrift eingesetzt werden:

a) $f(3) = 3^3 = 27$
b) $f(5) = 5^3 = 125$
c) $f\left(-\frac{1}{7}\right) = \left(-\frac{1}{7}\right)^3 = -\frac{1}{343}$
d) $f(a^2) = (a^2)^3 = a^6$
e) $f(2a+b) = (2a+b)^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

Nehmen wir noch eine weitere Aufgabe: gegeben sei die Funktion $f(x)=5+x$ und folgende Koordinaten:

a) (0|?)

b) (5|?)
c) (?|7)
d) (?|a)

Bei a) und b) können wir wie in der vorherigen Aufgabe vorgehen, da wir die x-Koordinaten gegeben haben. Also:

a) $f(0) = 5 + 0 = 5$
b) $f(5) = 5 + 5 = 10$

Bei c) und d) sind nur die y-Koordinaten gegeben, also die Funktionswerte. Von der Definition wissen wir, dass f(x)=y ist. Also können wir umstellen:

$$f(x) = 5 + x$$

$$\Leftrightarrow x = f(x) - 5 = y - 5$$

Und eingesetzt:

c) $x = 7 - 5 = 2$
d) $x = a - 5$

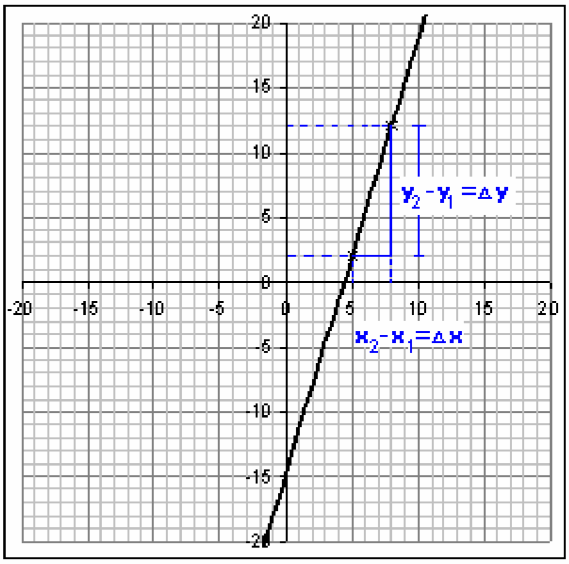
Lineare Funktionen

Eine lineare Funktion ergibt graphisch dargestellt immer eine Gerade. Diese Gerade wird festgelegt durch zwei Eigenschaften: ihre Steigung und der Schnittpunkt mit der y-Achse im Koordinatensystem. Die Normalform einer linearen Funktion lautet:

$$f(x) = m \cdot x + b\,,$$

wobei m die Steigung und b der so genannte y-Achsenabschnitt ist, also der Wert, bei dem die Gerade die y-Achse schneidet.

Geraden werden (im Normalfall) immer durch mindestens zwei Punkte festgelegt. Nehmen wir eine Beispielgerade: die Gerade g geht durch die Punkte P(5|2) und Q(8|12). Das sieht graphisch dargestellt dann so aus:



Die Steigung m der Geraden erhalten wir durch die Gleichung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. In unserem Beispiel waren die beiden x-Werte 5 und 8, die beiden y-Werte 2 und 12. Es folgt also:

$$m = \frac{12 - 2}{8 - 5} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Für die Normalform einer Geraden ergibt sich also in unserem Falle:

$$g : f(x) = 3\frac{1}{3} \cdot x + b$$

Wie kommt man nun an das b? Ganz einfach: man setzt einen der beiden Punkte in die Gleichung ein. Da beide auf der Geraden liegen, ist dies auch möglich:

$g : f(x) = y$

$y = 3\frac{1}{3} \cdot x + b$

$\Leftrightarrow b = y - 3\frac{1}{3} \cdot x$

$\Leftrightarrow b = 2 - 3\frac{1}{3} \cdot 5$

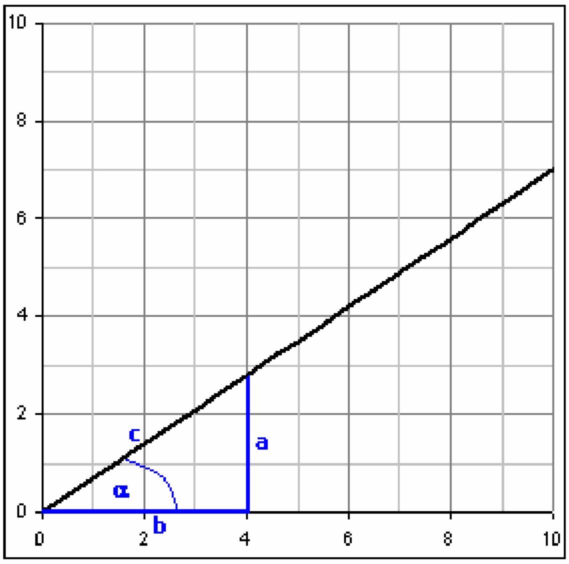
$\Leftrightarrow b = -14\frac{2}{3}$

$g : f(x) = 3\frac{1}{3} \cdot x - 14\frac{2}{3}$

Und die Geradengleichung ist uns schon bekannt.

Steigung und Steigungswinkel

Ist eine Gerade g gegeben, so hat sie eine Steigung. Was uns als interessierte Mathematiker nun interessiert, ist der Steigungswinkel, also der Winkel, den die Gerade mit der x-Achse bildet. Schauen wir uns dazu ein Beispiel an:



Worum es geht ist der Winkel α. In der Zeichnung ist bereits ein Steigungsdreieck eingezeichnet. Dieses Dreieck hat einen rechten Winkel (gebildet durch a und b, also unten rechts), was für unser Problem nicht ganz unwichtig ist. Denn bei rechten Winkeln liegt es doch nahe, trigonometrische Funktionen zu verwenden.

Rein theoretisch könnte man sich jetzt eine aussuchen, aber sinnvoll wäre es, wenn wir eine nutzen würden und dabei noch Zusammenhänge erkennen könnten. Für den Winkel α wäre der Tangens angebraucht. Zur Erinnerung:

$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$, in der Zeichnung links also $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$. Was sind nun a und b?

Wenn wir uns an das Steigungsdreieck von weiter oben noch mal erinnern, stellen wir fest, dass $a=\Delta y$ und $b=\Delta x$ ist. Also:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

Wir wissen nun also, dass $\tan(\alpha) = m$ ist. Ist der Steigungswinkel gegeben, so ist sein Tangens gleich der Steigung. Umgekehrt gilt:

$$\alpha = \arctan(m) \text{ bzw. } \alpha = \tan^{-1}(m)$$

Zwei kleine Beispiele:

1.) Gegeben sei die Steigung m=1,8. Wie groß ist der Steigungswinkel?

LÖSUNG:

$\alpha = \arctan(1{,}8) = 60{,}95°$

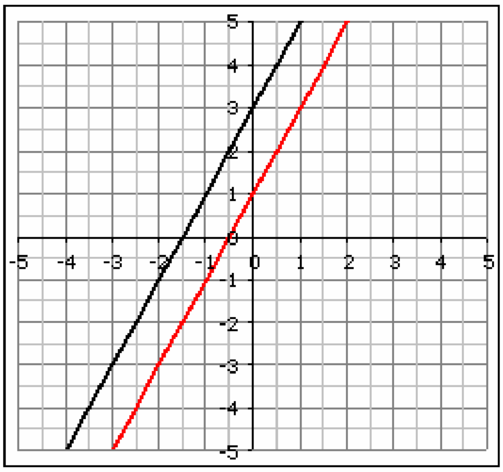
2.) Gegeben sei der Steigungswinkel α=75°. Wie groß ist die Steigung?

LÖSUNG:

$m = \tan(75°) = 3{,}73$

Parallelität zweier Geraden

Zwei Geraden g und h sind zueinander parallel, wenn die Steigungen der Geraden gleich sind. Beispiel: $g: f(x) = 2x + 3$ und $h: f(x) = 2x + 1$. Im Graphen sieht man das auch sehr deutlich:



Es gilt für g und h:
$m_g = m_h$
Das bedeutet natürlich auch, dass die Steigungswinkel der beiden Geraden gleich groß sein müssen, da gilt:

$$\left.\begin{array}{l} m_g = \tan(\alpha_g) \\ m_h = \tan(\alpha_h) \end{array}\right\} \quad m_g = m_h \Rightarrow \tan(\alpha_g) = \tan(\alpha_h) \Leftrightarrow \alpha_g = \alpha_h$$

Eine mögliche Beispielaufgabe: gegeben sei die Gerade $g: f(x) = 7x+5$. Es soll eine parallele Gerade berechnet werden, die durch den Punkt P(0|3) geht.
LÖSUNG:

$m_g = 7 = m_h$

$h: f(x) = 7x + b$

$3 = 7 \cdot 0 + b$

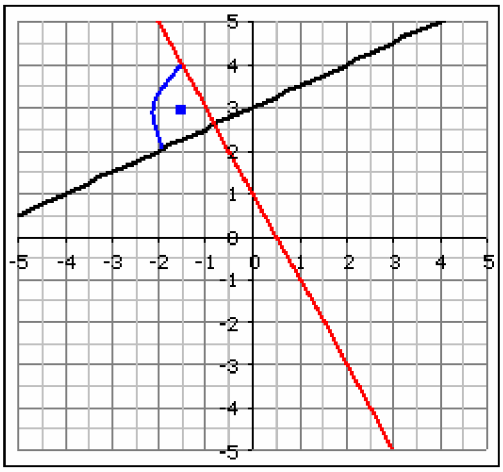
$\Leftrightarrow b = 3$

$h: f(x) = 7x + 3$

Orthogonale Geraden

Zwei Geraden g und h sind orthogonal zueinander, wenn die eine Gerade senkrecht auf der anderen steht und umgekehrt. Beispiel:

$g: f(x) = \frac{1}{2}x + 3$; $h: f(x) = -2x + 1$



Damit zwei Geraden zueinander orthogonal sind, muss für ihre Steigungen gelten:

$$m_g = -\frac{1}{m_h} \text{ bzw. } m_h = -\frac{1}{m_g}$$

Eine Beispielaufgabe: gegeben sei die Gerade g:f(x)=3x+7. Es soll eine Gerade h durch den Punkt P(3|-5) gehen, die orthogonal zu g ist.
LÖSUNG:

$$m_g = 3 \Rightarrow m_h = -\frac{1}{3}$$

$$h: f(x) = m_h x + b$$

$$h: f(x) = -\frac{1}{3}x + b$$

$$-5 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + b$$

$$\Leftrightarrow -5 = -1 + b$$

$$\Leftrightarrow b = -4$$

$$h: f(x) = -\frac{1}{3}x - 4$$

Man kann auch von zwei gegebenen Geraden den Schnittpunkt berechnen, indem man ihre Funktionsgleichungen gleich setzt:

$$y_g = y_h$$

$$\Leftrightarrow 3x + 7 = -\frac{1}{3}x - 4$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1}{3}x = -11$$

$$\Leftrightarrow x = -3\frac{3}{10}$$

Den y-Wert berechnet man wie weiter oben schon mal erklärt, indem man den gegebenen x-Wert in eine der beiden Geradengleichungen einsetzt. Man kann in beide Gleichungen einsetzen, da bei Geraden, sofern sie denn nicht identisch sind, nur ein Schnittpunkt vorliegt, und der immer den gleichen y-Wert für beide Geraden hat. Somit:

$$y = 3x + 7 \Leftrightarrow y = 3 \cdot \left(-3\frac{3}{10}\right) + 7 = 16\frac{9}{10}$$

Somit ist der gesuchte Schnittpunkt der beiden Geraden $S\left(3\frac{3}{10} \mid 16\frac{9}{10}\right)$.

Berechnung des Mittelpunktes einer Strecke

Es sei die Strecke $\overline{AB}$ mit A(3|1) und B(7|13) gegeben. Gesucht ist der Mittelpunkt M dieser Strecke. Der Punkt M hat die Koordinaten $M(x_M|y_M)$. Es gilt:

$$x_M = \frac{x_2 - x_1}{2}; \; y_M = \frac{y_2 - y_1}{2} \text{ (Also die Mittelwerte der Koordinaten)}$$

Für unser Beispiel ergibt sich somit:

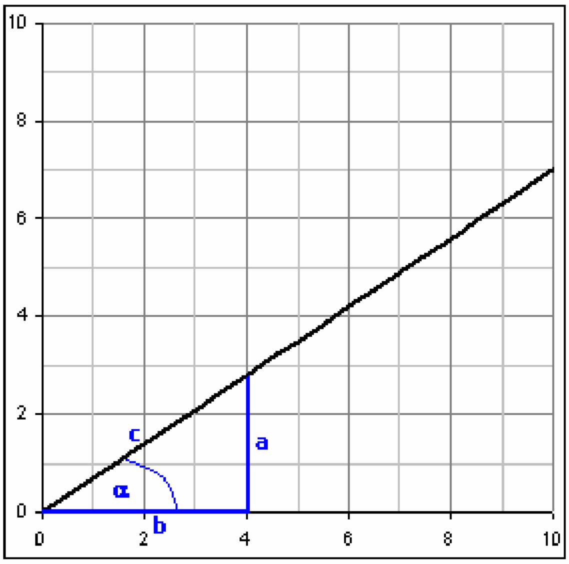
$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ y_M &= \frac{13-1}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}\right\} \quad M(2|6)$$

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist also M(2|6). Verallgemeinert ist der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$:

$$M_{AB}\left(\frac{x_2 - x_1}{2} \mid \frac{y_2 - y_1}{2}\right)$$

Berechnung der Streckenlänge

Gegeben sei weiterhin die o.g. Strecke $\overline{A(3\,|\,1)B(7\,|\,13)}$. Gesucht ist diesmal die Streckenlänge. Schauen wir uns das einmal in einer Planzeichnung an:



In der Zeichnung wurde a und b eingezeichnet, also das Steigungsdreieck. Das ist auch gar nicht so schlecht, da das Dreieck ein rechtwinkliges Dreieck ist. Für diesen Spezialfall gilt der Satz des PYTHAGORAS: $a^2+b^2=c^2$. In der Zeichnung ist die Länge der Strecke gleich c. Somit gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Wie wir vom Steigungsdreieck wissen, ist $a=\Delta y$ und $b=\Delta x$. Somit gilt weiterhin:

$$c = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \left|\overline{AB}\right|$$

Für unser Beispiel von eben gilt dann also bei der Streckenlänge:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(13-1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{144-16} \approx 11{,}31$$

Die beiden Punkte A und B sind also etwa 11,31 Längeneinheiten voneinander entfernt.

Berechnung der Nullstellen einer Geraden

Nullstellen sind die Stellen, an denen der Funktionswert einer gegebenen Funktion g gleich Null sind (bei Geraden gibt es höchstens eine Nullstelle, es sei denn, sie sind mit der x-Achse identisch. Es kann auch keine Nullstellen geben, wenn m=0 und b@0 ist). Nehmen wir als Beispiel die Funktion $f(x)=2x+3$. Der Funktionswert f(x) muss gleich Null sein, somit gilt:

$$0 = 2x + 3$$
$$\Leftrightarrow -3 = 2x$$
$$\Leftrightarrow x = 6$$

Die Nullstelle der Funktion $f(x)=2x+3$ ist N(6|0).
Allgemein gilt für Nullstellen:

$$y = mx + b$$
$$0 = mx + b$$
$$\Leftrightarrow -b = mx$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}$$

$$N\left(-\frac{b}{m}\,|\,0\right)$$