Lineare Funktionen

Unter linearen Funktionen versteht man alle Funktionen der Form

$$\boxed{f(x) = mx + b}$$

Das Bild einer solchen Funktion ergibt eine *Gerade*. Beschäftigen wir uns nun also mit den Eigenschaften einer solchen Funktion.

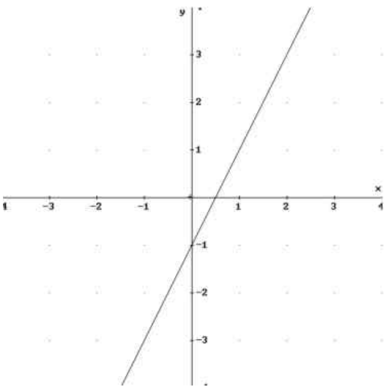

Abbildung 1: Eine gewöhnliche Gerade, dargestellt durch die lineare Funktion $f(x) = 2x - 1$

Bedeutung der Funktion

Wir beschäftigen uns nun mit der Bedeutung der einzelnen *Parameter* m und b einer linearen Funktion.
Das m gibt die *Steigung* der Gerade an. $m = 2$ bedeutet also, dass $f(x)$ um 2 größer wird, wenn x um 1 größer wird. $m = -0.5$ bedeutet, dass $f(x)$ um 0.5 kleiner wird, wenn x um 1 größer wird.

- Ist $m > 0$ spricht man von einer *steigenden* Gerade
- Ist $m = 0$ spricht man von einer x-Achsenparallelen Gerade
- Ist $m < 0$ spricht man von einer *fallenden* Gerade

Das b ist der sogenannte *y-Achsenabschnitt* der Geraden. Es ist der Funktionswert, bei dem die Gerade die y-Achse schneidet. Die Gerade $f(x) = 2x - 1$ schneidet die y-Achse also bei $(0/-1)$

Ermitteln der Funktionsgleichung einer Geraden

Hat man zwei Punkte gegeben und soll die Funktion der Geraden bestimmen, durch die diese Gerade verläuft, so geht man wie folgt vor:

1. Ermitteln der Steigung
   (a) Die Steigung ist definiert als „Höhenunterschied pro Breitenunterschied“, mathematisch $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

(b) Nennen wir den ersten Punkt $P_1(x_1/y_1)$ und den zweiten Punkt $P_2(x_2/y_2)$ gilt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Ermitteln des y-Achsenabschnittes

   (a) Den im 1. Schritt ermittelten Wert für m setzen wir nun in die Funktionsgleichung ein. Für x und $f(x)$ setzen wir den x bzw. den y-Wert eines der beiden gegebenen Punkte ein:

   $$y_1 = m \cdot x_1 + b$$

   (b) Da diese Gleichung nur b als Unbekannte besitzt, können wir nach b auflösen:

   $$b = y_1 - m \cdot x_1$$

Nullstelle

Die Nullstelle bzw. der Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse lässt sich relativ einfach berechnen: Wir wissen von der Nullstelle, dass sie die Koordinaten $P(x_0/0)$ besitzt: Der y-Wert muss auf jeden Fall 0 sein. Man muss also einfach für y bzw. $f(x)$ 0 einsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} f(x) &= mx + b \\ 0 &= mx_0 + b \\ -b &= mx_0 \\ \frac{-b}{m} &= x_0 \end{aligned}$$

Lage zweier Geraden

Zwei Geraden, beschrieben durch die Funktionen $f(x) = m_f x + b_f$ und $g(x) = m_g x + b_g$ im zweidimensionalen Raum stehen zueinander in einer der drei folgenden Beziehung:

- Sie sind *parallel* zueinander. Dies ist der Fall, wenn $m_f = g_f$ gilt.
- Sie sind *identisch*. Dies gilt logischerweise, wenn $f(x) = g(x)$ gilt, also $m_f = m_g$ und $b_f = b_g$.
- Sie *schneiden* sich. Dies ist der Fall wenn $m_f \neq m_g$ gilt.

Schnittpunkt zweier Geraden bestimmen

Betrachtet man zwei Geraden, interessiert man sich dafür, ob und wo sie sich schneiden. Wenn für beide Geraden die Steigung *identisch* ist, sind die Geraden, wie oben gesagt, parallel. Sie schneiden sich dann natürlich nicht.
Wir schauen nun, wie man den Schnittpunkt zweier Geraden bestimmen kann. Wir nennen den Schnittpunkt $S(x_s/y_s)$ und die beiden Geraden $f(x) = m_f x + b_f$ sowie $g(x) = m_g x + b_g$. Da der Schnittpunkt auf *beiden* Geraden liegen muss,

wissen wir, dass $f(x_s) = g(x_s)$ gelten muss. Wir erhalten so die Gleichung:

$$\begin{aligned}
f(x_s) &= g(x_s) \\
m_f x_s + b_f &= m_g x_s + b_g \\
m_f x_s - m_g x_s &= b_g - b_f \\
x_s(m_f - m_g) &= b_g - b_f \\
x_s &= \frac{b_g - b_f}{m_f - m_f}
\end{aligned}$$

Allgemein kann man sagen: **Setze die Funktionsterme der Gerade gleich und löse dann nach x auf**.
Diesen so berechneten Wert setzt man nun in eine der beiden Funktionen $f(x)$ oder $g(x)$ ein. Welche ist egal, da der Schnittpunkt ja auf beiden Geraden liegt!

Beispiel mit Skizze:

$$f(x) = 2x - 1 \quad g(x) = -x + 2$$

Um nun den Schnittpunkt zu bestimmen, setzen wir einfach die beiden Funk-

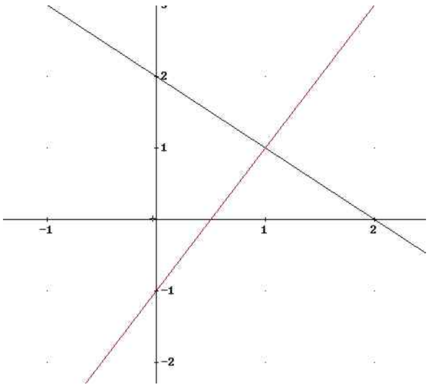

Abbildung 2: Die Geraden $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = -x + 2$

tionsterme gleich, denn wir wissen ja, dass für den Schnittpunkt $f(x_s) = g(x_s)$ gelten muss.

$$2x_s - 1 = -x_s + 2$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Umformen[1] ganz einfach $x_s = 1$. Dies setzen wir ein und erhalten:

$$y_s = f(x_s) = f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Zur Probe setzen wir unseren x_s-Wert auch in $g(x)$ ein:

$$y_s = g(x_s) = g(1) = -1 + 2 = 1$$

Der gesuchte Schnittpunkt ist also $S(1/1)$.

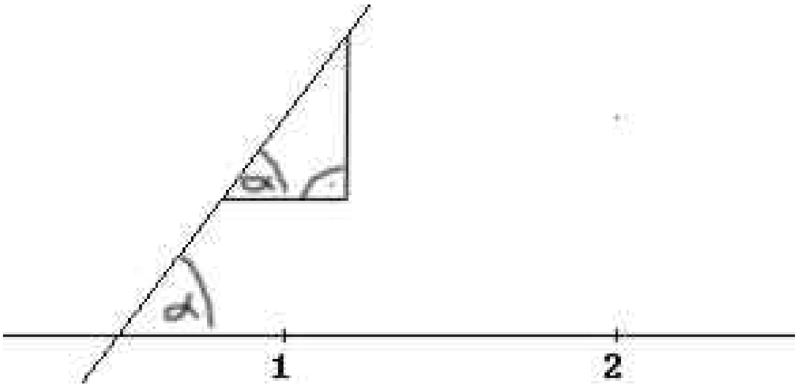

Abbildung 3: Die Geraden $f(x) = 2x - 1$ mit eingezeichnetem Winkel α sowie *Steigungsdreieck*

Der Winkel einer Geraden

Manchmal interessiert man sich für den Winkel, den die Gerade mit der x-Achse bildet. Dazu benötigt man etwas Trigonometrie.
Figur 3 zeigt eine lineare Funktion mit eingezeichnetem *Steigungsdreieck*. Für den Winkel α gilt: $\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$. Der Winkel α, den eine Gerade der Form $f(x) = mx + b$ also mit der x-Achse einschliesst ist also $\alpha = \arctan m$.

[1] Wie man lineare Gleichungen löst, erfährst Du hier.

