Quadratische Gleichungen

Unter quadratischen Gleichungen fasst man alle Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = d$$

zusammen. Es sind alle Gleichungen, in denen x in zweiter Potenz vorkommt. Wir beschäftigen uns nun mit den verschiedenen Lösungsmöglichkeiten für solche Gleichungen.

Einige Sonderfälle

1. Wenn $a = 0$ ist, hat man natürlich keine quadratische Gleichung vorliegen, sondern eine lineare.

2. Wenn $b = 0$ ist, formt man wie folgt um:

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= d \\ ax^2 &= d - c \\ x^2 &= \frac{d-c}{a} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{d-c}{a}} \end{aligned}$$

   Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2 &= 73 \\ 3x^2 &= 75 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

   Wichtig: Ist $c > d$ bekommt man eine negative Wurzel, also *keine* Lösung. Ist $c = d$ bekommt man genau eine Lösung, nämlich 0. Ansonsten bekommt man zwei Lösungen.

3. Wenn $c = 0$ und $d = 0$ folgt man wie folgt um:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x(ax + b) &= 0 \end{aligned}$$

   Damit ein Produkt 0 ist, muss mindestens ein Faktor 0 sein, daher gilt für die obige Gleichung entweder $x = 0$ oder $ax + b = 0$, daraus folgt $x = 0$ oder $x = \frac{-b}{a}$.

Tritt keiner der Sonderfälle ein, wendet man die sogenannte p-q-Formel ein, die oft auch Mitternachtsformel genannt wird. Um die Formel anzuwenden muss man die Quadratische Gleichung erst auf die Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Copyright 2002/2003 by Clemens Adolphs. Alle Rechte vorbehalten.

bringen. Diese Form wird auch *Normalform* genannt. Vor dem x^2 darf kein Faktor (Koeffizient) mehr stehen und rechts vom Gleichheitsszeichen muss 0 stehen. Aus der Gleichung $ax^2 + bx + c = d$ erhält man diese Form wie folgt:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= d \\ ax^2 + bx + c - d &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c-d}{a} &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt haben wir die gewünschte Form. Wir nennen die Zahl, die vor dem x steht einfach p, und die Zahl die ohne x ist nennen wir q. Sie ist das *absolute* Glied der Normalform. Dann gilt für die Lösung:

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{(\frac{-p}{2})^2 - q}$$

Wenden wir das ganze auf ein Beispiel an: $x^2 - x - 6 = 0$. Hier ist $p = -1$ und $q = -6$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-1)}{2} \pm \sqrt{(\frac{-(-1)}{2})^2 - (-6)}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} x_1 = &\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2} && = 3 \\ x_2 = &\ \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2} && = -2 \\ & && L = \{-2; 3\} \end{aligned}$$

Die Diskriminante

Eine quadratische Gleichung kann entweder 0, eine oder zwei Lösungen besitzen. Wann tritt welcher Fall ein? Die p-q-Formel liefert uns eine Gleichung, in der eine Wurzel vorkommt. Offensichtlich hängt die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung nur davon ab, was unter dieser Wurzel steht. Dies ist ja wie oben bereits gezeigt der Term

$$(\frac{p}{2})^2 - q.$$

Diesen Term nennt man auch *Diskriminante*, die wir im folgenden mit D abkürzen wollen. Nun gilt:

- Ist D $>$ 0, so hat die Gleichung **2** Lösungen.
- Ist D $=$ 0, so hat die Gleichung **genau eine** Lösung.
- Ist D $<$ 0, so hat die Gleichung **keine** Lösung.

Diese Angabe gilt übrigens nur für den Bereich der *reellen Zahlen*. Im Bereich der *komplexen Zahlen* hat jede quadratische Gleichung genau 2 Lösungen[1].

[1] im Bereich der komplexen Zahlen hat sogar *jedes* ganzrationale Polynom n-ten Grades genau n Lösungen.

Copyright 2002/2003 by Clemens Adolphs. Alle Rechte vorbehalten.

Der Satz von Viëta

Mit dem Satz von Vieta kann man manche quadratischen Gleichungen ohne Probleme im Kopf lösen.

Satz von Viëta: Hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q$ die Lösungen x_1 und x_2, so ist

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

also

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

Daraus folgt

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Hat man nun also eine Gleichung der Form $x^2 + px + q$ vorliegen, muss man zwei Zahlen suchen, deren Summe $-p$ und deren Prodult q ist. Beispiel:

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

8 kann als $1 \cdot 8$ und als $2 \cdot 4$ dargestellt werden, sowie natürlich durch $-1 \cdot -8$ und $-2 \cdot -4$. Von diesen vier Möglichkeiten gilt für $x_1 = -2, \quad x_2 = -4$: $-2 - 4 = -6 = -p$. Damit hat die quadratische Gleichung $x^2 + 6x + 8$ die Lösungen -2 und -4: $L = \{-2; -4\}$.

Herleitung der p-q-Formel

Für Interessierte gibt es hier die Herleitung der oben benutzten p-q-Formel. Dazu erinnern wir uns noch einmal an die erste binomische Formel:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Haben wir nun eine quadratische Gleichung so vorliegen, dass wir diese binomische Formel „rückwärts“ anwenden können, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 + 2qx + q^2 &= 0 \\ (x + q)^2 &= 0 \\ x &= -q \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= 0 \\ x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 &= 0 \\ (x + 3)^2 &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Jetzt liegt die quadratische Gleichung natürlich nicht immer in dieser praktischen Form vor, es ist also nicht immer möglich, einfach die quadratische Ergänzung durchzuführen. Um es trotzdem hinzubekommen, wenden die Mathematiker einen Trick an. Sie addieren eine 0. Das klingt zunächst sinnlos, denn es ändert ja scheinbar nichts. Fangen wir etwas weiter vorne an: Wir haben also nun eine Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0.$$

Copyright 2002/2003 by Clemens Adolphs. Alle Rechte vorbehalten.

Wir wissen, dass bei einer binomischen Formel in der Mitte $2ab$ steht. Unser a soll hier x sein, also muss $p = \frac{b}{2}$ sein, damit $2ab = px$ gilt. Damit würden wir zunächst $(x + \frac{p}{2})^2$ erhalten. Ausmultipliziert ergäbe dies:

$$(x + \frac{p}{2})^2 = x^2 + px + (\frac{p}{2})^2$$

Wir formen nun unsere Gleichung $x^2 + px + q = 0$ wie folgt um:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben zwar einfach ein $(\frac{p}{2})^2$ dazu addiert, ziehen es aber auch gleich wieder ab, addieren also rein praktisch gesehen 0. Jetzt können wir aber fortschreiten:

$$\begin{aligned} (x + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q &= 0 \\ (x + \frac{p}{2})^2 &= (\frac{p}{2})^2 - q \\ x + \frac{p}{2} &= \pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \\ x &= \frac{-p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \end{aligned}$$

Dies ist die oben benutzte p-q-Formel. Übringes: Den verwendeten Trick nennt man *quadratische Ergänzung*.

Copyright 2002/2003 by Clemens Adolphs. Alle Rechte vorbehalten.