Die reellen Zahlen

Unter den reellen Zahlen versteht man die Menge der rationalen und der irrationalen Zahlen.

Die irrationalen Zahlen

Um die Besonderheit der rationalen Zahlen zu erklären schauen wir uns noch einmal die verschiedenen Arten von Dezimalzahlen an:

1. Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen: 2.75 oder 1.5674. Diese Zahlen gehören zu den rationalen Zahlen.
2. Dezimalzahlen mit unendlich vielen periodischen Nachkommastellen: $\frac{1}{3} = 3.3333\ldots = 3.\overline{3}$. Auch diese Zahlen gehören zu den rationalen Zahlen, da man sie als Bruch darstellen kann.
3. Dezimalzahlen mit unendlichen vielen **nicht periodischen** Nachkommastellen: $\pi = 3.1415926\ldots$ oder $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$. Diese Zahlen können nicht als Bruch dargestellt werden. Diese Zahlen werden **irrationale Zahlen** genannt.

Da die irrationalen Zahlen unendlich viele Nachkommastellen haben, die aber nicht periodisch sind, also keinem bestimmten Muster folgen, kann man sie in der Dezimalschreibweise nicht exakt darstellen.

Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist

Um zu beweisen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, wendet man den **Beweis durch Widerspruch** an. Dazu tut man erst so, als wäre das Gegenteil von dem, was man beweisen möchte, der Fall. Wir tun also so, als wäre $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl:

1. Es sei $\sqrt{2}$ eine ratioanle Zahl. Dann kann man sie auch als Bruch darstellen. Diesen Bruch nennen wir ^{p}

9. Da man zu einer unsinnigen Behauptung kommt, wenn man $\sqrt{2}$ als Bruch darstellt, kann man $\sqrt{2}$ folglich nicht als Bruch darstellen. Daher kann es sich bei $\sqrt{2}$ auch nicht um eine rationale Zahl handeln.

Wurzeln

Definition

Die Wurzel x einer Zahl y wird geschrieben: $x = \sqrt{y}$.
Unter x versteht man diejenige nicht negative reelle Zahl, für die gilt: $x^2 = y$.
Daraus folgt, dass es für negative Zahlen keine Wurzel gibt. $\sqrt{-3}$ ist z.B. ***nicht definiert***. **Wichtig:** Obwohl z.B. $\sqrt{64} = 8$ hat die Gleichung $x^2 = 64$ die Lösung ± 8.

Wurzeln zu anderen Basen als 2

Unter der "Wurzel" verstand man bisher die *Quadratwurzel* einer Zahl. Es gibt aber auch Wurzeln mit anderen Basen als der 2. Diese sind dann wie folgt definiert:
$x = \sqrt[n]{y}$ wenn $x^n = y$ mit $x \geq 0$ subsubsectionRechenregeln Für das Rechnen mit Wurzeln gelten ganz bestimmte Regeln:[1]

1. $\sqrt{x^2} = x$ bzw. $\sqrt[n]{x^n} = x$
2. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
3. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
4. $(\sqrt{a})^x = \sqrt{a^x}$
5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
6. **Vorsicht:** $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

Diese Rechenregeln kann man mitunter dazu benutzen, bestimmte Wurzeln zu vereinfachen:

$$\sqrt{200} = \sqrt{2 \cdot 100} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

[1] Wenn nicht explizit angegeben gelten die Gesetze sowohl für Quadratwurzeln auch als Wurzeln zur Basis n.