Die Äquivalenzumformungen

Wie im vorhergehenden Kapitel *Gleichungslehre* gesagt, besteht eine Gleichung aus zwei Termen, die über das Gleichheitszeichen miteinander in Verbindung stehen. Ziel der Gleichungslehre ist es, bei Gleichungen die Variablen zu bestimmen. Dazu wandelt man so lange beide Terme um, bis auf einer Seite des Gleichheitszeichens nur noch die Variable alleine steht. Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 5x \\ 3x &= 5x - 4 \\ 3x - 5x &= -4 \\ -2x &= -4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Natürlich darf man dabei die Gleichung nur so umformen, dass das Gleichheitszeichen immernoch stimmt. Die Umformung darf also nicht die Lösungsmenge der Gleichung ändern! Eine Umformung, die diese Bedingung erfüllt, nennt man *Äquivalenzumformung*. Wir werden nun verschiedene Umformungen untersuchen und sehen, ob es auch tatsächlich Äquivalenzumformungen sind.

Das Addieren eines Termes

Addiert bzw. subtrahiert man einen beliebigen Term zu *beiden* Seiten einer Gleichung, so ist dies eine Äquivalenzumformung.

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 7x \\ 3x + 4 + (-3x) &= 7x + (-3x) \\ 4 &= 4x \end{aligned}$$

Egal, ob es nun sinnvoll ist, irgendeinen Term einfach zu einer Gleichung zu addieren, oder nicht: Erlaubt ist es auf jeden Fall. Man benutzt die Addition, um gezielt einzelne Summanden von einer Seite auf die andere Seite einer Gleichung zu bringen. Im obigen Beispiel haben wir die $3x$ von der linken auf die rechte Seite der Gleichung gebracht, in dem wir auf beiden Seiten $3x$ subrahiert haben. Auf der linken Seite heben sich $3x$ und $-3x$ auf, auf der rechten Seite kommt $-3x$ neu hinzu.

Multiplizieren und Dividieren

Multipliziert oder teilt man beide Seiten einer Gleichung durch die selbe Zahl (außer der 0!), dann handelt es sich um eine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} 4x &= 32 \\ 4x : 4 &= 32 : 4 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Man benutzt es, um z.B. die Vorfaktoren der Variable zu „entfernen“, wie im obigen Beispiel.

Was ist mit der 0? Man darf die Terme einer Gleichung nicht durch 0 teilen, weil man sowieso niemals durch 0 teilen darf. Der Taschenrechner sagt da „Error“ zu, und es ist auch völlig unlogisch, etwas durch 0 zu teilen. $12 : 3$ bedeutet ja: Wie oft passt die 3 in die 12. Aber wie oft soll die 0 in eine Zahl passen?
Warum man nicht mit 0 *multiplizieren* darf ist da schon etwas vertrackter. Nehmen wir am besten ein Beispiel:

$$2x = 4$$

Hier gilt offensichtlich $x = 2$. Was passiert nun, wenn wir beide Seiten mit 0 multiplizieren? Ganz einfach:

$$0 \cdot 2x = 0\dot{4}$$

Diese Gleichung hat nun unendlich viele Lösungen. Egal was man für x einsetzt, $0 \cdot 2x$ wird immer den Wert 0 haben. Da nun aber die Lösungsmenge statt der Lösung 2 nun unendlich viele Lösungen enthält, haben wir ja die Lösungsmenge verändert. Somit ist das multiplizieren mit 0 *keine* Äquivalenzumformung

Multiplizieren und Dividieren mit Variablen

Mutlipliziert oder dividiert man eine Gleichung mit einer Variablen, muss man voraussetzen, dass diese Variable niemals 0 sein kann, denn das ist ja wie oben erklärt *nicht* erlaubt:

$$\begin{aligned} 2x &= 3x \\ 2x : x &= 3x : x \\ 2 = 3 & \end{aligned}$$

So geht es nicht!
Löst man die Gleichung richtig auf, erhält man:

$$\begin{aligned} 2x &= 3x \\ 2x - 2x &= 3x - 2x \\ 0 &= x \end{aligned}$$

Die Lösung ist also $x = 0$. Deshalb führte das Dividieren durch x zu Unsinn...
Ansonsten gilt: Dividiert man durch eine Variable, muss man anmerken, dass dies nur geht, wenn die Variable ungleich 0 ist, und diesen Sonderfall noch einmal gezielt untersuchen:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= x \\ x + 2 &= 1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Und falls $x = 0$

$$0 + 0 = 0$$

Die Gleichung halt also die Lösungen -1 und 0.

Quadrieren und Wurzelziehen

Quadriert man beide Seiten einer Gleichung, so handelt es sich **nicht** um eine Äquivalenzumformungen, wie folgendes Beispiel ganz einfach zeigt:

$$x = 3$$

hat offensichtlich die Lösung 3. Aber

$$x^2 = 9$$

hat die Lösugen 3 und -3, denn beides ergibt quadriert 9! Man hat hier also eine Lösung zu viel!
Möchte man nun auf beiden Seiten einer Gleichung die Wurzel ziehen, weil das x in quadratischer Form vorliegt, muss man beachten, dass es in den meisten Fällen 2 Lösungen gibt:

$$\begin{aligned} x^2 + 9 &= 25 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

-4 und 4 sind also die Lösungen, nicht 4 alleine.
Erhält man einen *negativen* Wert unter der Wurzel, so ist die Gleichung, zumindest mit den im Unterricht benutzten Zahlen, *nicht* lösbar:

$$x^2 = -16$$

besitzt **keine** Lösung. Schließlich ist $4^2 = +16$ und $(-4)^2 = +16$. Auf quadratische Gleichungen wird allerdings in einem anderen Artikel näher eingegangen.

Den Kehrwert bilden

Steht die Variable im Nenner eines Bruchs, kann es nützlich sein, den Kehrwert auf beiden Seiten der Gleichung zu bilden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} &= \frac{1}{4} \\ x + 1 &= 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Das Bilden des Kehrwerts ist genau dann eine Äquivalenzumformung, wenn auch nach dem Umformen keine 0 in irgendeinem Nenenr auftaucht.

Das Anwenden von Funktionen

Hier für etwas höhere Semster, sprich: Ab Oberstufe.
Wendet man auf beide Seiten einer Gleichung bestimmte Funktionen wie $\sin$ oder $\arcsin$, aber auch $\log$ an, gilt: Es handelt sich genau dann um eine Äquivalenumformung, wenn die Funktionswerte der Funktion einzigartig sind. Bei der Sinusfunktion kommen aber immer die selben Funktionswerte in periodischer

Weise vor, so dass es keine Äquivalenzumformung ist, auf beiden Seiten den Sinus zu bilden:

$$\alpha = 90°$$

hat natürlich die Lösung $\alpha = 90°$. Aber

$$\sin\alpha = \sin 90° = 1$$

hat die Lösugen $\alpha = 90°$, $\alpha = 270°$, und insgesamt $\alpha = (2n-1) \cdot 90°$ mit $n > 1$. Man kann, kurz gesagt, jede Funktion auf beide Seiten einer Gleichung als *Äquivalenzumformung* benutzen, wenn diese Funktion eine eindeutig definierte *Umkehrfunktion* besitzt. Mehr dazu in einem anderen Kapitel.

