# Der MILLIKAN-Versuch

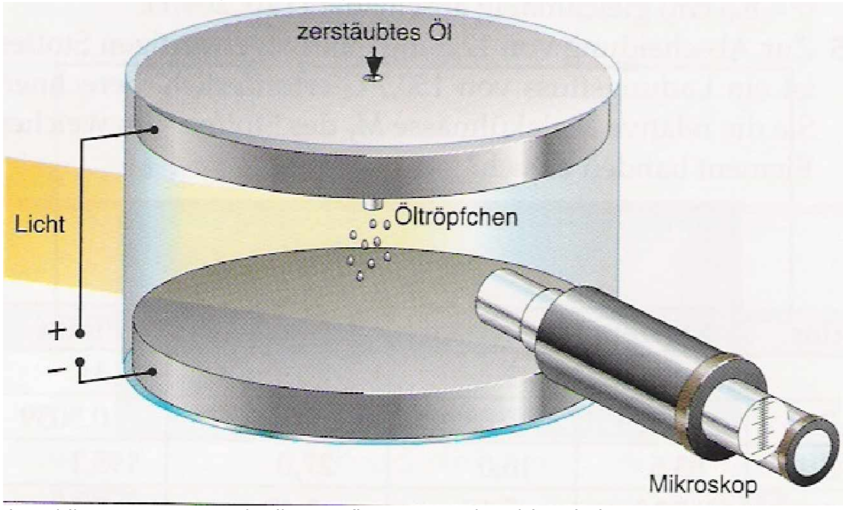
## 1. Einführung

Der Millikan-Versuch wurde im Jahre 1916 erfunden von ROBERT ANDREWS MILLIKAN (1868 - 1953). Er sollte beweisen, dass Ionen bzw. geladene Teilchen nur als ganzzahlige Vielfache der Elementarladung $e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,C$ auftreten können.

Unser Augenmerk in diesem Kapitel wird auf den Versuch selbst, dessen Erklärung und dessen Auswertung gelenkt. Am Ende soll die Ladung eines Teilchens mithilfe des Millikan-Versuchs berechnet werden können.

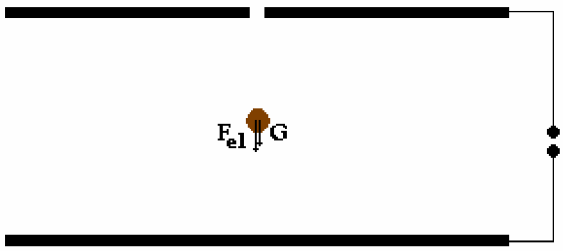
## 2. Aufbau und Durchführung

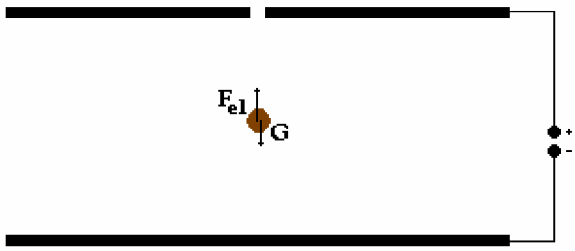
Zum Millikan-Versuch benötigt man zuerst ein elektrisches Feld, in das Öltröpfchen gesprüht werden. Das Öl ist (negativ) geladen, sodass das elektrische Feld darauf eine Wirkung erzielen kann. Zwischen den Platten, die das elektrische Feld erstellen, befindet sich eine Skala, damit man die Bewegungen der Öltröpfchen leichter nachvollziehen kann. Mit Hilfe eines Mikroskops werden die Öltröpfchen durch Beleuchtung sichtbar gemacht. Skizziert sieht das etwa so aus:




*(Graphik aus: METZLER Physik, 3. Auflage, 1998, Schroedel Verlag)*

Das Öl kommt also zwischen die beiden Platten, die man umpolen kann. Das bedeutet für die Öltröpfchen, dass sie entweder steigen oder sinken, je nach Polung des elektrischen Feldes. Zu der elektrischen Kraft, die die Tröpfchen in Bewegung setzt, kommt noch die Gewichtskraft, die die Tröpfchen erfahren. Das bedeutet, es gibt zwei mögliche Fälle:




Entweder, beide Kräfte wirken nach unten, oder eine Kraft wirkt nach oben, die andere nach unten. Es ist notwendig, die richtige Spannung anzulegen, damit die elektrische Kraft größer ist als die Gewichtskraft, da sonst das Tröpfchen nicht in der Lage ist, zu steigen.

Ziel des Versuches ist es nun, ein einzelnes Öltröpfchen zu beobachten: man misst die Steig- und Sinkzeit auf einer vorher festgelegten Strecke (z.B. s=1mm), um dadurch die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit zu ermitteln. Mit diesen Werten wird es dann möglich sein, die Ladung des beobachteten Öltröpfchens zu berechnen, dazu später aber mehr.

Das Erfreuliche am Millikan-Versuch ist, dass die zu messenden Geschwindigkeiten durch Reibung annähernd konstant sind. Das bedeutet, dass es fast keine Beschleunigung gibt, sondern eine geradlinige Bewegung.
Um zu sinnvollen Ergebnissen zu kommen, ist es üblich und nötig, mehrere Öltröpfchen zu beobachten (natürlich nacheinander). Das zeigt zum einen eine Reproduzierbarkeit des Versuches und zum anderen war es ja Ziel, nachzuweisen, dass alle Ionen als Ladung Vielfache der Elementarladung haben, also dass kein Ion z.B. die Ladung 2,5e hat.

## 3. Auswertung und Berechnung

Wir haben zunächst zwei Bewegungen zu betrachten: die Sink- und die Steigbewegung. Wenn das Öltröpfchen sinkt, dann wirken elektrische Kraft und Gewichtskraft in die gleiche Richtung, d.h. wir können ihre Beträge addieren, um eine resultierende Kraft zu erhalten:

$$F_{R1} = F_{el} + F_G$$

$$E = \frac{F_{el}}{Q} \Leftrightarrow F_{el} = E \cdot Q$$

$$G = m \cdot g$$

$$\Rightarrow F_{R1} = E \cdot Q + m \cdot g$$

Für den Steigvorgang gilt, dass die elektrische Kraft entgegengesetzt zur Gewichtskraft wirkt, die beiden Kräfte also für eine Resultierende subtrahiert werden müssen:

$$F_{R2} = F_{el} - F_G$$

$$\Rightarrow F_{R2} = E \cdot Q - m \cdot g$$

Beim Versuch ist zu beachten, dass es neben den anderen Kräften zusätzlich noch eine Reibung gibt. Nach dem STOKES'schem Reibungsgesetz ergibt sich für diese Kraft:

$F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$, wobei $\eta$ [Sprich: „Eta"] die Viskosität der Luft ist $\left(\eta = 1{,}828 \cdot 10^{-5} \frac{N \cdot s}{m^2}\right)$, r der Radius des beobachteten Öltröpfchens und v die Geschwindigkeit des Tropfens seien.

Damit die Kraft, die das Tröpfchen bewegt, groß genug ist, muss sie die Reibung aufwiegen können, für den Sinkvorgang bedeutet das also:

$$F_{R1} = F_R$$

$$\Leftrightarrow E \cdot Q + m \cdot g = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_1$$

$$\Leftrightarrow v_1 = \frac{E \cdot Q + m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}$$

$v_1$ ist hierbei die Sinkgeschwindigkeit.
Analog gilt für die Steiggeschwindigkeit:

$$F_{R2} = F_R$$

$$\Leftrightarrow E \cdot Q - m \cdot g = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_2$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{E \cdot Q - m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}$$

Unser Ziel ist es, Q zu berechnen. Dazu haben wir noch relativ viele Unbekannte und außerdem noch keinen Zusammenhang zwischen den beiden Geschwindigkeiten. Den werden wir uns jetzt mathematisch schaffen, indem wir einfach $v_1$ und $v_2$ einmal addieren, und dann subtrahieren:

$$v_1 + v_2 = \frac{E \cdot Q + m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r} + \frac{E \cdot Q - m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r} = \frac{E \cdot Q + m \cdot g + E \cdot Q - m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r} = \frac{2 \cdot Q \cdot E}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}$$

$$v_1 - v_2 = \frac{E \cdot Q + m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r} - \frac{E \cdot Q - m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r} = \frac{E \cdot Q + m \cdot g - E \cdot Q + m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r} = \frac{2 \cdot m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}$$

Beide Gleichungen enthalten (unschönerweise) den Radius der Öltröpfchen, der uns aber nicht geläufig ist. Daher stellen wir beide Gleichungen einfach nach r um und setzen sie anschließend gleich, sodass r aus beiden eliminiert wird:

$$v_1 + v_2 = \frac{2 \cdot Q \cdot E}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{Q \cdot E}{(v_1 + v_2) \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta}$$

$$v_1 - v_2 = \frac{2 \cdot m \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{m \cdot g}{(v_1 - v_2) \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta}$$

$$\Rightarrow \frac{Q \cdot E}{(v_1 + v_2) \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta} = \frac{m \cdot g}{(v_1 - v_2) \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta}$$

Wir behalten weiterhin das Ziel im Auge, Q zu ermitteln und formen schon mal danach um:

$$\frac{Q \cdot E}{(v_1 + v_2) \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta} = \frac{m \cdot g}{(v_1 - v_2) \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q}{(v_1 + v_2) \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta} = \frac{m \cdot g}{E \cdot (v_1 - v_2) \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q}{(v_1 + v_2)} = \frac{m \cdot g \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta}{E \cdot (v_1 - v_2) \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q}{(v_1 + v_2)} = \frac{m \cdot g}{E \cdot (v_1 - v_2)}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{(v_1 + v_2) \cdot m \cdot g}{E \cdot (v_1 - v_2)}$$

Da auch E nicht bekannt ist, ersetzen wir es durch $E = \frac{U}{d} \Leftrightarrow \frac{1}{E} = \frac{d}{U}$, wobei d der Plattenabstand des elektrischen Feldes ist (welcher bekannt ist) und U die einzustellende, angelegte Spannung (also ebenfalls bekannt):

$$Q = \frac{(v_1 + v_2) \cdot m \cdot g \cdot d}{U \cdot (v_1 - v_2)}$$

Weiterhin stört die Masse m eines Öltröpfchens. Ein Öltröpfchen ist relativ schwer zu wiegen, was es notwendig macht, die Masse aus der Gleichung zu eliminieren. Die Dichte von Öl ist jedoch bekannt $\left(\rho_{Öl} = 874 \frac{kg}{m^3}\right)$, womit es sinnvoll ist, damit zu rechnen:

$$\rho_{Öl} = \frac{m}{V} \Leftrightarrow m = \rho_{Öl} \cdot V$$

Bei den Tröpfchen gehen wir davon aus, dass sie die Form einer Kugel haben, womit das Problem des Volumens (fast) behoben wäre:

$$m = \rho \cdot V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho$$

Daraus folgt für Q:

$$Q = \frac{(v_1 + v_2) \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g \cdot d}{U \cdot (v_1 - v_2)}$$

Da uns immer noch nicht bekannt ist, wie der Radius des Öltröpfchens lautet, übernehmen wir die Formel von oben für r:

$$r = \frac{Q \cdot E}{(v_1 + v_2) \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{(v_1 + v_2) \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot g \cdot d \cdot \left( \frac{Q \cdot E}{(v_1 + v_2) \cdot 3 \cdot \pi \cdot \eta} \right)^3}{U \cdot (v_1 - v_2)}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{\frac{(v_1 + v_2) \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot g \cdot d \cdot Q^3 \cdot E^3}{(v_1 + v_2)^3 \cdot 27 \cdot \pi^3 \cdot \eta^3}}{U \cdot (v_1 - v_2)}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{(v_1 + v_2) \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot g \cdot d \cdot Q^3 \cdot E^3}{(v_1 + v_2)^3 \cdot 27 \cdot \pi^3 \cdot \eta^3 \cdot U \cdot (v_1 - v_2)}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{4 \cdot Q^3 \cdot E^3 \rho \cdot g \cdot d}{81 \cdot \pi^2 \cdot \eta^3 \cdot U \cdot (v_1 + v_2)^2 \cdot (v_1 - v_2)}$$

Wir teilen nun durch $Q^3$, damit wir alle Q auf eine Seite bekommen, und erhalten:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{Q^2} = \frac{4 \cdot E^3 \cdot \rho \cdot g \cdot d}{81 \cdot \pi^2 \cdot \eta^3 \cdot U \cdot (v_1 + v_2)^2 \cdot (v_1 - v_2)}$$

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{81 \cdot \pi^2 \cdot \eta^3 \cdot U \cdot (v_1 + v_2)^2 \cdot (v_1 - v_2)}{4 \cdot E^3 \cdot \rho \cdot g \cdot d}$$

E ist uns leider immer noch nicht bekannt, da wir aber weiterhin wissen, dass $E = \frac{U}{d} \Leftrightarrow \frac{1}{E} = \frac{d}{U}$ ist, erhalten wir:

$$Q^2 = \frac{81 \cdot \pi^2 \cdot \eta^3 \cdot U \cdot d^3 \cdot (v_1 + v_2)^2 \cdot (v_1 - v_2)}{4 \cdot U^3 \cdot \rho \cdot g \cdot d}$$

$$\Leftrightarrow Q^2 = \frac{81 \cdot \pi^2 \cdot \eta^3 \cdot d^2 \cdot (v_1 + v_2)^2 \cdot (v_1 - v_2)}{4 \cdot U^2 \cdot \rho \cdot g}$$

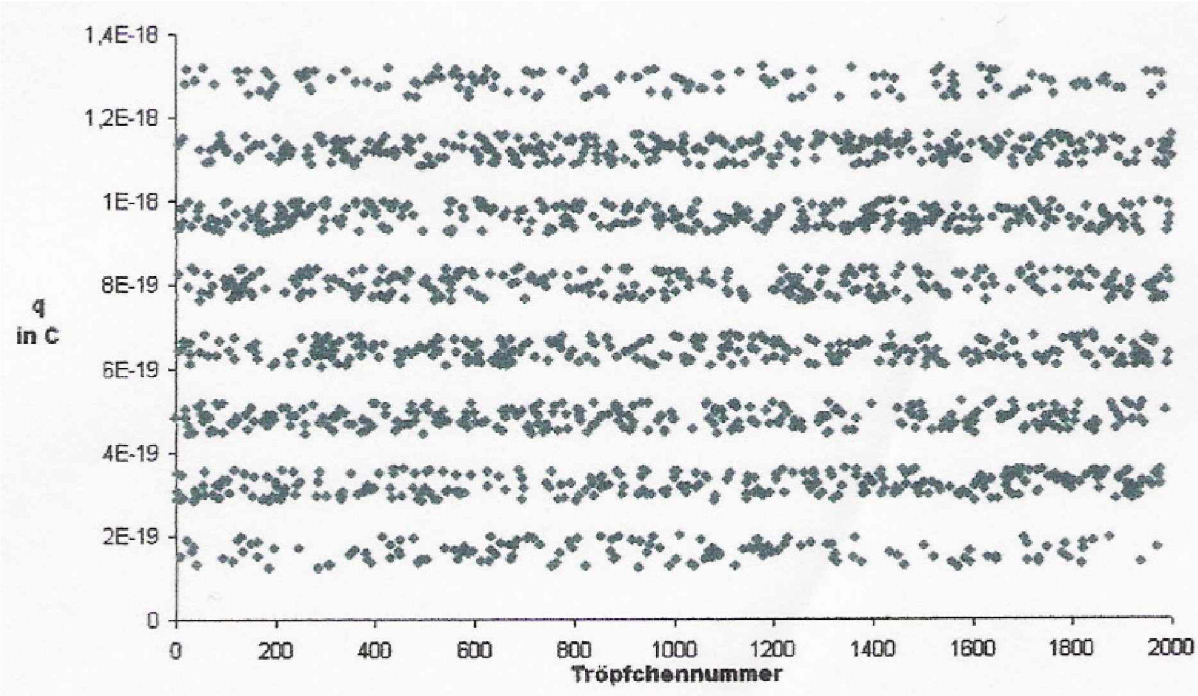
$$\Rightarrow |Q| = \sqrt{\frac{81 \cdot \pi^2 \cdot \eta^3 \cdot d^2 \cdot (v_1 + v_2)^2 \cdot (v_1 - v_2)}{4 \cdot U^2 \cdot \rho \cdot g}}$$

$$\Leftrightarrow |Q| = \frac{9}{2} \cdot \pi \cdot d \cdot \sqrt{\frac{\eta^3}{\rho \cdot g}} \cdot \frac{1}{U} \cdot (v_1 + v_2) \cdot \sqrt{(v_1 - v_2)}$$

Mit dieser Formel haben wir alles, was wir brauchen und kennen: wir brauchten Q, und alle Variablen im Ausdruck sind uns bekannt.

## 4. Auswertung eines Millikan-Versuchs:

Diese Graphik zeigt in etwa den Ausgang eines Millikan-Versuchs, wenn eine Fehlerquote von etwa 3% herrschte:




Deutlich erkennbar ist, dass sich die Werte um bestimmte Ladungen „tummeln“ bzw. sammeln (was aber an kleinen Messungenauigkeiten liegt). Man erkennt, dass nur ganzzahlige Vielfache der Elementarladung e für die Ladung der Öltröpfchen in Frage kommen, also die Abstände zwischen den „Sammelorten“ alle etwa gleich sind. Damit ist auch der erste Gedanke, den der Versuch zeigen sollte, geklärt.

## 5. Anmerkung

Zur Zeit Millikans waren künstliche Teilchen noch nicht entdeckt, deren Ladung auch von einem Vielfachen der Elementarladung abweichte. Heutzutage beschreibt der Versuch nur Ladungen, die sich in der Natur finden lassen, also keine künstlich erstellten.